



규토 라이트 N제 Contents

규토 수학 라이트 N제 오리엔테이션

책소개	8p
검토후기	10p
추천사	12p
규토 라이트 N제 100% 공부법	16p
규토 라이트 N제 추천 계획표	18p
규토 라이트 N제 학습 가이드	24p
맺음말	26p

문제편

함수의 극한과 연속

1. 함수의 극한과 연속	31p
Guide Step	31p
01. 함수의 극한	32p
02. 함수의 극한값의 계산	39p
Training – 1 Step	49p
Training – 2 Step	59p
Master Step	67p

2. 함수의 연속	71p
Guide Step	71p
01. 함수의 연속	72p
02. 연속함수의 성질	77p
Training – 1 Step	83p
Training – 2 Step	93p
Master Step	101p

미분

1. 미분계수와 도함수	107p
Guide Step	107p
01. 미분계수	108p
02. 도함수	116p
Training – 1 Step	121p
Training – 2 Step	133p
Master Step	139p
2. 도함수의 활용	143p
Guide Step	143p
01. 접선의 방정식	144p
02. 평균값 정리	149p
03. 함수의 증가와 감소, 극대와 극소	152p
04. 함수의 그래프	159p
05. 방정식과 부등식에의 활용	164p
06. 속도와 가속도	168p
07. 삼차함수와 사차함수의 그래프 (심화특강)	170p
Training – 1 Step	181p
Training – 2 Step	205p
Master Step	219p

적분

1. 부정적분과 정적분	231p
Guide Step	231p
01. 부정적분	232p
02. 정적분	238p
Training – 1 Step	249p
Training – 2 Step	259p
Master Step	269p

규토 라이트 N제 Contents

2. 정적분의 활용	275p
Guide Step	275p
01. 넓이	276p
02. 속도와 거리	288p
Training – 1 Step	293p
Training – 2 Step	301p
Master Step	311p

빠른 정답	313p
-------	------

해설편

빠른 정답	7p
-------	----

함수의 극한과 연속

1. 함수의 극한	21p
Guide Step	21p
Training – 1 Step	25p
Training – 2 Step	36p
Master Step	43p
2. 함수의 연속	48p
Guide Step	48p
Training – 1 Step	50p
Training – 2 Step	62p
Master Step	71p

미분

1. 미분계수와 도함수	76p
Guide Step	76p
Training – 1 Step	78p
Training – 2 Step	92p
Master Step	100p
2. 도함수의 활용	108p
Guide Step	108p
Training – 1 Step	114p
Training – 2 Step	152p
Master Step	179p

적분

1. 부정적분과 정적분	212p
Guide Step	212p
Training – 1 Step	215p
Training – 2 Step	232p
Master Step	249p
2. 정적분의 활용	262p
Guide Step	262p
Training – 1 Step	265p
Training – 2 Step	278p
Master Step	293p

오리엔테이션

책소개

검토후기

추천사

규토 라이트 N제 100% 공부법

규토 라이트 N제 추천 계획표

규토 라이트 N제 학습법 가이드

맺음말

규토 라이트 N제 Contents

개념과 기출을 이어주는 bridge 역할의 교재

규토 라이트 N제는 기출문제와 개념 간의 격차를 최소화하고 1등급으로 도약하기 위한 탄탄한 base를 만들어 주기위해 기획한 교재입니다. 학생들이 처음 개념을 학습한 뒤 막상 기출문제를 풀면 그 방대한 양과 난이도에 압도당하기 쉽습니다. 이를 최소화 하기 위해 4단계로 구성하였고 책에 적혀 있는 규토 라이트 N제 100% 공부법으로 꾸준히 학습하다보면 역으로 기출문제를 압도하실 수 있습니다.

유형과 기출을 한 권으로

Gyu To Math (규토 수학)에서 첫 글자를 따서 총 4단계로 구성하였습니다.

1. **G**uide step (개념 익히기편)

교과서 개념, 실전개념, 예제, 개념 확인문제, '규토의 Tip'을 모두 담았습니다.
단순히 문제만 푸는 것이 아니라 개념도 함께 복습하실 수 있습니다.
교과서에 직접적인 서술이 없더라도 수능에서 자주 출제되는 포인트들을 녹여내려고 노력하였습니다.

2. **T**rainig - 1 step (필수 유형편)

기출문제를 풀기 전의 Warming up 단계로 수능에서 자주 출제되는 유형들을 분석하여 수능최적화 자작으로 구성하였습니다.
기초적인 문제뿐만 아니라 학생들이 어렵게 느낄 수 있는 문제들도 다수 수록하였습니다.
단시간 내에 최신 빈출 테마들을 Compact하게 정리하실 수 있습니다.

3. Training – 2 step (기출 적용편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 3~4점 문제를 선별하여 구성하였습니다.

필수 유형편에서 배운 내용을 바탕으로 실제 기출문제를 풀어보면서 사고력과 논리력을 증진시킬 수 있습니다.

실제 기출 적용연습을 위하여 유형 순이 아니라 전반적으로 난이도 순으로 배열했습니다.

4. Master step (심화 문제편)

사관, 교육청, 수능, 평가원에서 난이도 있는 문제를 선별하여 준킬러 자작문제와 함께 구성하였습니다.

과하게 어려운 킬러문제는 최대한 지양하였고 킬러 또는 준킬러 문제 중에서도

1등급을 목표로 하는 학생이 반드시 정복해야하는 문제들로 구성하였습니다.

교과서 개념유제부터 어려운 기출 4점까지 모두 수록

교과서 개념유제부터 수능에서 킬러로 출제된 문제까지 모두 수록하였습니다.

규토 라이트 N제 수2의 경우 총 702제이고

문제집의 취지에 맞게 중 ~ 중상 난이도 문제들이 제일 많이 분포되어 있습니다.

규토 라이트 N제의 추천 대상

1. 개념강의와 병행할 교재를 찾는 학생
2. 개념을 끝내고 본격적으로 기출문제를 들어가기 전인 학생
3. 해당과목을 compact하게 정리하고 싶은 학생
4. 무엇을 해야할지 갈피를 못잡는 3~4등급 학생
5. 기출문제가 너무 어렵게 느껴지는 학생
6. 아무리 공부해도 수학성적이 잘 오르지 않는 학생

규토 라이트 N제 review

최이고니 / 울산대학교 의학과

안녕하세요, 새로운 규토 라이트 N제의 검토를 맡게 된 최이고니입니다. 수학은 개념공부를 따로 하면 문제를 풀 때 금방 개념이 헛갈리게 됩니다. 하지만 라이트 N제는 개념설명부터 간단한 유제, 필수 유형, 기출문제까지를 한 흐름으로 볼 수 있어서 공부하다보면 어느새 개념이 묵직하게 머릿속에 자리잡게 될 것입니다. 라이트 N제는 언제나 가장 소중한! 기출문제들과 기출변형들이 잔뜩 들어있는 문제집이기 때문에 가볍게 한 번 풀고 넘어가지 말고 이번에도 100%공부법을 잘 따라가면서 실력을 다지시길 바랍니다! 파이팅~

김주은 / 울산대학교 의학과

안녕하세요, 규토 라이트 N제 검토를 맡은 김주은입니다. 벌써 규토 N제 검토를 맡은지 4년차가 되어가네요. 처음에 규토 고난도 N제 검토를 했을 때에 비해 규토 N제가 더 많은 수험생들이 접할 수 있게끔 점점 더 영역을 넓혀 가는 것을 보고 있으니 마음이 뿌듯합니다 ㅎㅎ 무엇보다도 규토 N제의 강점은 학생들이 어려워하거나 놓치기 쉬운 부분을 예리하게 잡아내어 이해하기 쉽게끔 설명해준다는 점 같아요. Guide Step의 개념 설명이 간단하지만 문제풀이에 있어 중요한 포인트들은 다 제대로 짚고 있으며, 그 뒤에서 이어지는 Training과 Master step에서는 문제풀이 개념을 잘 체화할 수 있는 문제들이 엄선되어 있습니다. 규토 라이트 N제를 다 풀었을 때에는 수2를 깔끔하게 마스터할 수 있으리라 자신합니다! 다들 어려운 시기에 공부하시느라 고생 많으신데, 조금만 더 힘내세요:-) 화이팅입니다~!

송지훈 / 인하대학교 수학과

수능 수학을 공부하면서 개념과 문제 사이의 벽을 느끼는 학생들이 많습니다. 개념과 문제 사이의 간극을 효율적으로 좁혀가려면 실전적 개념에 대한 학습과 이를 통한 여러 가지 유형의 문제들을 난도별로 학습할 필요성이 있습니다. 규토 라이트 N제는 Guide step에서는 교과서 개념들과 이것들에서 파생되는 여러 가지 실전적 개념들을 소개하여 학생들이 보다 쉽게 문제에 적용할 수 있도록 해주고 training step을 세분화하여 쉬운 문제부터 기출 문제까지 유형별로 소개하였습니다. 개념을 문제에 적용하는 것이 쉽지 않은 학생들 혹은 기초가 부족한 학생들에게 정말 추천할만한 책입니다.

조정아 / 울산대학교 의학과

작년에는 규토 고득점 N제를 검토했던 기억이 있는데, 이번에는 규토 라이트N제 검토를 맡게 되어 영광입니다. 규토 고득점 N제에서는 4점짜리 자작문제들만 수록되어 있다면 이번에는 완전하게 개념과 문제적용을 둘 다 할 수 있는 교재가 나온 것 같아서 이 책이 수험생들께 좋은 교재가 될 것 같다는 생각이 듭니다.

책을 보시면 아시겠지만, 기본적인 개념설명부터 꼼꼼하게 보지 않으면 놓칠 수 있는 개념까지 다 챙기신 것 같아요. 그리고 기출까지 들어가 있어서 이 책 한 권 열심히만 보시면 개념, 기출, 문제적용까지 고득점을 할 수 있습니다. 2022 수능도 열심히 공부하시고 파이팅!

박도현 / 성균관대학교 수학과

안녕하십니까, 규토 라이트 N제 검토를 맡게 된 성균관대학교 수학과 박도현입니다. 올해부터 수능 수학영역은 가, 나형으로 분리하지 않고 수1, 수2 공통문제 22문제, 나머지 8문제는 미적, 기하, 확률 중 택1로 보는 형태로 전환됩니다. 수1, 수2 문제가 총 22문제이므로 이전 수능보다 수1, 수2영역을 더 확실하게 공부하게 될 필요가 생겼습니다. 또한 지난 수능에 비해 현재의 수능 수학영역의 흐름은 고난도 킬러 문제들을 하향시키고, 준킬러 수준의 문제들의 비율을 높이고 난이도를 강화하는 쪽으로 가고 있습니다. 규토 라이트 N제는 이러한 현재의 수능의 흐름을 제대로 파악해주고 문제유형들을 공략해주는 책이라고 말할 수 있습니다.

규토 라이트 N제는 교과서적인 개념부터 시작해 기본 유제, 함정문제, 준킬러 문제들까지 모두 수록했습니다. 또한 저자의 고퀄리티 자작문제들을 통해서 앞으로의 수능에 나올법한 문제들을 풀어볼 수 있습니다.

2021년 규토 라이트 N제 수2를 풀어보신 분들은 이번 2022년 개정판을 보면 작년 개정판에 비해 전체적으로 더 깔끔해진 느낌을 얻을 겁니다. 마지막으로 이 책을 본 모든 학생 여러분께 좋은 수학 성적을 거두길 바랍니다!

규토 라이트 N제 recommendation

나는 수능에서 처음으로 수학 1등급을 받았다. (이나현)

안녕하세요! 9월 백분위 89에서 수능 백분위 96으로 오르는 데 있어 규토 라이트의 도움을 크게 받아 작성하게 되었습니다. 핵심은 규토라이트를 통해 개념과 기출의 중요성을 깨닫게 되었다는 점입니다. 규토라이트는 1-4등급 모두에게 좋은 책이지만, 저는 특히 2-3등급에 머무르는 학생들에게 추천하고 싶습니다.

백분위 89에서 1등급은 드라마틱한 성적 변화가 아니라고 생각하실 수도 있습니다. 하지만 저는 고등학교와 재수 생활을 통틀어 평가원 모의고사에서 1등급은 맞아본 적도 없고 2등급 후반 ~ 3등급 초반을 진동했습니다. 저는 수학을 일주일에 적어도 40시간 이상 투자했고, 유명한 강의와 문제집을 다양하게 접해봤음에도 1등급을 맞지 못하는 원인을 파악하지 못했었는데, 9월부터 규토 라이트로 두 달동안 공부하며 제 약점을 파악했고 결국 수능에서 처음으로 1등급을 맞았습니다. 규토 라이트를 처음 접하게 된 건 9월 모의고사에서 2등급을 간신히 걸친 후였는데, 저는 1등급을 맞게 된 원인이 크게 두 가지라고 생각합니다. 첫 번째로 규토 라이트의 구성입니다. 기출과 N제 그리고 ebs까지 적절하게 섞인 구성이 너무 좋았습니다. 또한 가이드 스텝을 스킵하지 마시고 꼭 정독하시는 것을 추천드립니다. 규토님의 농축된 팁까지 얻어갈 수 있습니다. 마스터 스텝에서도 배워갈 점이 많으니 겁먹지 말고 몇 번이고 풀어보시는 것을 추천드립니다. 저는 규토 라이트를 접하기 전까진 왜 수학에서 개념과 기출을 강조하는지 이해가 가지 않았습니다. 기출은 지겹기만 했고 개념은 다 아는 것만 같았습니다. 하지만 규토 라이트를 통해 제대로 된 기출 학습과 약점훈련을 할 수 있었습니다.

두 번째는 규토님입니다. 일단 규토님은 등급에 따라 커리큘럼과 학습법을 알려주는데 이대로만 하면 100점도 가능하다고 생각합니다. 가장 도움되었던 학습법은 복습입니다. 뻔한 것 같지만, 알면서도 꺼려지는 게 복습입니다. 그리고 틀린 문제를 생각 없이 계속 푸는 것이 아니라, 제대로 된 복습 가이드를 정해주셔서 이대로만 하면 된다는 점이 좋았습니다. 저는 비록 9월 중순부터 시작해서 전체적으로는 3회독밖에 못했지만... 설명할 수 있을 때까지 계속 풀고 또 풀었습니다. 또한 이메일로 직접 질문을 받아주시는데, 질문하는 문제에 따라서 가끔 제게 필요한 보충문제나 영상 덕분에 빠르게 이해할 수 있었습니다. 그리고 똑같은 문제를 계속 틀리거나, 사실 모의고사에서 안 좋은 점수를 받는 등 막막할 때가 많았는데, 그 때마다 실질적인 말씀을 많이 해주셨습니다. 'theme 안의 문제들은 서로 다른 문제들이지만 이 문제들이 똑같이 느껴질 때 비로소 이해한 것'이라는 말이 아직도 기억에 남네요. 전 이 말을 듣고 깨달음이 크게 왔고 그 뒤로 수학에 대한 감을 제대로 잡았던 것 같아서 써봅니다. 이외에, 6월 9월 보충프린트도 너무 감사했습니다.

저는 비록 9월 중순부터 규토 라이트를 시작했지만 재수 초기로 돌아간다면 규토 라이트로 시작해서 규토 고득점으로 끝내지 않았을까 싶습니다. 제대로 된 기출 학습을 원하시는 분들은 규토 라이트하세요 !!

9월 수학 3등급에서 수능 수학 1등급으로! (노유정)

규토 라이트 수1, 수2로 학습하여 짧은 기간 동안 9월 3 → 수능 1의 성적향상을 이루었습니다. 저는 8월에 수시 지원 계획이 바뀌며 급하게 수능 준비를 하게 되었습니다. 수능은 100일 정도 밖에 남지 않았는데 개념은 거의 다 까먹었고, 원래 수학을 못하는 학생이었기 때문에 (1,2 학년 학평은 대부분 3등급) 수학이 가장 걱정되는 과목이었습니다. 그래서 짧은 기간 동안 개념 숙지와 문제 풀이를 할 수 있는 교재를 찾다가 규토 라이트를 접하게 되었습니다.

개념 인강을 들으면서 해당되는 단원의 문제를 하루에 약 60문제 정도 풀어서 10월 말 정도에 규토 1회독을 끝냈습니다. 그 후에는 시간이 부족해서 1회독 후 틀린 문제와 기출 위주로만 반복적으로 보았습니다.

규토라이트는 효율적인 학습을 가능하게 하는 책입니다. 기존의 기출 문제집을 풀 때는 난이도별로 구분이 되어있지 않아 제 수준에 맞지 않는 문제를 풀면서 시간을 낭비했던 적이 많습니다. 그러나 규토 라이트를 통해 공부할 때는 개념 숙지에서 고난도 문제 풀이로 넘어가는 과정이 효율적이었습니다. 특히, 지나치게 어려운 문제도 쉬운 문제도 없기 때문에 실력 향상에 큰 도움이 되었습니다. 가이드에 적혀있는 대로 충분히 고민을 하고, 안 풀릴 경우에는 다음 날 다시 풀거나 2회독 때 풀기로 표시를 해두었습니다. 마스터 스텝을 제외하고는 이렇게 하면 대부분 해결할 수 있었던 것 같습니다.

이러한 교재 특성 때문에 수학을 잘 못하는 학생이었음에도 원하는 성적을 얻을 수 있었습니다. 제 사례와 같이 급하게 수능 준비를 하거나, 스스로 수학머리가 없다고 생각하는 수험생들에게 규토를 추천해주고 싶습니다.

[수2 공부법] 수포자에서 수능 수학 백분위 92%!

규토 라이트 n제 수2 리뷰를 할 수 있어서 정말 영광입니다. 먼저 전 나형 수포자였습니다. 현역시절 맨 앞장에 4문제정도 풀고 운이 좋으면 7~8번까지도 풀리더라구요. 그리고 주관식 앞에 쉬운 2문제 정도 풀고 다 찍었습니다. 항상 6~7등급 찍은게 몇 개 맞으면 5등급까지 갔습니다. 생각해보면 수학을 제대로 공부해본 적이 없었고 주위에서 수학은 절대 단기간에 할 수 없다. 그냥 그 시간에 영어나 탐구를 더하라는 말에 현역시절 수학을 제대로 집중해서 문제를 푼 적이 없었습니다. 현역시절 제가 받은 성적은 6등급 타과목도 잘치지 못한 탓에 재수를 결정했고 불현듯 수학공부를 해봐야겠다는 생각을 했습니다. 어찌면 내 일생에 단 한 번뿐인데 수학공부 한 번 해보자라고 마음먹었습니다. 다른 과목보다 수2가 문제였습니다. 확통이나 수1에 비해 분명히 해야 할 부분이 저에게 많았기 때문이었습니다. 2월에 본격적으로 수2과목을 빠르게 개념정리를 했습니다. 수2만은 전년도와 교육과정이 크게 바뀌지 않은 탓에 빠르게 개념인강과 교과서로 정독했습니다. 아주 쉬운 기초부터 시작한 셈이죠. 교과서와 개념인강을 3회독정도 해보니 아주 쉬운 유형들은 풀 수 있게 되었습니다. (이를테면 함수의 극한에서 그래프를 주고 좌극한과 우극한의 합차 유형이나 간단한 미분 적분 계산문제 함수의 극한꼴 정적분의 활용 중 속도 가속도문제 등) 교과서 유제에도 그리고 평가원 기출에도 매번 나오는 유형들은 교과서만으로도 풀 수 있었습니다. 하지만 처음 보는 낯선 유형과 함수의 추론등 기초가 부족한 저에게 이런 문제들은 거대한 벽과 다름없었습니다. 과연 1년 안에 내가 이런 문제를 극복가능한 것일까. 교과서와 개념인강만으로는 해결할 수 없었습니다. 충분히 고민한 뒤에 제가 내린 결론은 문제의 양을 늘려야한다는 것이었습니다. 소위 수포자는 당연하게도 수학경험치가 현저히 낮습니다. 특히 함수 나오고 그래프 나오면 정말 무너지기 쉽죠. 그렇다고 1년도 안 남은 시점에서 중학수학과 고1수학을 체계적으로 본다는 것은 너무 어려운 일입니다. 1년안에 승부를 봐야하는 제 입장에서 현명한 선택이 아니었습니다. 그러다 우연히 커뮤니티에서 규토라이트n제를 알게 됐고 많은 리뷰와 블로그 내용을 꼼꼼히 보고 선택하기로 결정했습니다. 제가 규토 라이트 수2 n제를 택했던 근본적 이유는 충분한 문제량과 더불어 제 기본기를 탄탄하게 보완시켜줄 문제들이 다수 실려있었기 때문입니다.

규토 라이트 N제 recommendation

개념익히기와 <1 step> 필수유형편에서 기초적인 문제와 더불어 조금 심화된 문제까지 정말 질 좋은 문제들을 많이 풀었습니다. 양과 질을 동시에 확보한 셈이죠. 수능은 이차함수나 일차함수등 중학수학을 대놓고 물어보진 않습니다. 문제에서 가볍게 쓰이는 정도이죠. 수2를 공부하시면 많은 다항함수를 접하시게 될텐데 라이트n제 필수유형편으로 충분히 커버됩니다.

다음으로는 제가 가장 애정했던 <2 step> 기출적용편입니다. 시중에는 정말 많은 기출문제집이 있지만 규토n제 수2만이 갖는 특별함은 바로 최신경향을 반영한 교육청 사관학교 평가원 기출들만으로 공부할 수 있다는 점입니다. 일부 기출문제집은 최근 트렌드에 맞지 않는 문제들도 있고 또한 교육과정이 변했음에도 이전 교육과정의 문제들도 있는 반면 라이트n제 수2는 규토님의 꼼꼼한 안목으로 꼭 필요한 기출만을 선별했고 따로 다른 기출을 살 필요없이 실린 문제들만 잘 소화해도 기출을 잘 풀었다는 느낌을 받을 수 있을 겁니다. 저도 성적향상에 가장 도움이 됐던 step이었습니니다. 하지만 이 단계부터 문제가 어렵습니다. 특히나 수포자나 수학이 약하시분들은 정말 힘들 수 있습니다. 하지만 저는 포기하지 않고 끝까지 풀었습니다. 심지어 위에 빈칸에 체크가 7개가 되는 문제도 있었습니니다. 시간차를 두고 보고 또봤습니니다. 서두에서 규토님께서 제시한 수학 학습법에 의거해 복습날짜도 정확히 지키며 공부했습니다. 수학이 어려운 학생부터 조금 부족한 학생까지 <2 step>만큼은 꼭 공을 들여서라도 여러 번 회독하셨으면 좋겠습니니다. 수능은 어찌 보면 기출의 진화라고 할 만큼 기출에서 크게 벗어나지 않습니니다. 꼭 여러 번회독하셔서 시험장에서 비슷한 유형은 빠른 시간 안에 처리하실 수 있을 만큼 두고두고 보셨으면 좋겠습니니다. <2 step>를 잘소화했더니 6월과 9월을 응시했을때 어?! 이거 규토라이트 n제 수2에서 풀었던 느낌을 다수문제에서 받았습니니다. (다항함수에서의 실근의 개수 정적분의 넓이 미분계수의 정의등 단골로 나오는 유형이있습니니다.) 역시나 기출의 반복이었습니니다. 규토라이트 n제 수2를 통해 최신 트렌드 경향에 맞는 유형을 여러 문제를 통해 접하다 보니 정말 신기하게 풀렸고 어렵지 않게 풀 수 있었습니니다. 규토 라이트n제는 해설이 정말 좋습니니다. 제가 기본기가 부족했던 시기에도 규토해설만큼은 이해될 만큼 자세히 해설되어있고 현장에서 사용할 수 있을 만큼 완벽한 해설지라고 생각합니다. 제 풀이와 규토님 풀이를 비교해보면서 좀 더 현실적인 풀이를 찾는 과정에서 제 실력도 많이 향상되었습니니다.

마지막 마스터 스텝은 굉장한 난이도의 기출과 규토님의 자작문제들이 실려있습니니다. 제가 굉장히 고생한 스텝이었고 실제로 수능 전일까지 정말 안되는 문제들도 몇 개 있었습니니다. 1등급을 원하시는 분들은 꼭 넘어야할 산이라고 생각합니다. 1등급이 목표가 아니라도 마스터 스텝에 문제는 꼭 풀어보실만한 가치가 있습니니다. 문제가 풀리지 않더라도 그 속에서 수학적 사고력이 향상되는 경우가 있고 저도 올해 수능 20번을 맞출만큼 실력이 올라온 것도 마스터스텝 문제를 여러 번 심도 있게 고민해본 결과가 아닐까 싶습니니다. 시간이 조금만 남았다더라면 30번도 풀 수 있을 만큼 제 수학실력이 많이 올라와 있었습니니다. 라이트 n제 수2를 구매하시는 분들은 1문제도 거르지 마시고 완벽하게 다 풀어보는 것을 목표로 삼고 공부하시면 좋은 성과가 꼭 나올거라 생각합니다.

끝으로 저는 수포자였지만 결국 이번 수능에서 2등급을 쟁취하였고 목표한 대학에 붙을 점수가 나온 것 같습니다. ㅎㅎㅎ 수학이 힘든신 문과생분들! 수학에서 가장 중요한 것은 제가 생각하기에 정확한 개념과 많은 문제양을 풀어 수학에 대한 자신감을 키우는 것 이라고 생각합니다. 특히나 수2는 절대적인 양 확보가 정말 중요합니다. 하지만 교과서와 쉬운 개념서로는 한계가 있고 다른 기출문제집을 보자니 너무 두껍고 양이 많습니니다. 라이트n제 수2 각유형별로 기본부터 심화까지 한 권으로서 문제풀이의 시작과 마무리를 다할 수 있는 교재라고 자부합니니다. 올해만 하더라도 규토라이트 n제 수2교재로 다항함수 특히 3차함수 개형 그리기만도 수백번이 넘었던 것 같습니다. 시중 문제집과 컨텐츠가 난무하는 시기에 규토 라이트n제를 우연히 알게 되고 끝까지 믿고 풀었던 것에 감사하며 수포자도 노력하면 할 수있다는 말씀드립니다. 규토 라이트n제 수2 강추합니니다!! 끝으로 규토님께도 감사드립니다 :)

수학에 자신이 없었지만 수능 수학 100점! (김은주)

저는 유독 수학에 자신이 없었던, 2등급만 나오면 대박이라고 여겼던 학생이었습니다. 그랬던 제가 규토 라이트 N제를 공부하고 수능에서 100점을 받을 수 있었습니다.

코로나 19와 개인적인 사정으로 인해 학원에 다닐 수 없었던 저는 시중에 출판된 여러 문제집을 비교하며 독학에 적합한 교재를 찾는 중에 규토 라이트를 고르게 되었습니다. 많은 장점 중 제가 꼽은 이 책의 가장 큰 장점은 바로, “이 책을 공부하는 방법(?)” 이 마치 과외를 받는 기분이 들도록 수험생의 입장을 고려해서 세세하게 서술되어있기 때문이었습니다.

규토 N제를 만나기 전의 저는 나쁜 습관이 가득한 학생이었고, 그것이 제 성적을 갉아먹는 요인이었습니다. (찍어서 우연히 맞은 문제, 알고 보니 풀이 과정에서 오류가 있었는데 답만 맞은 문제도 그저 답이 맞으면 동그라미표시를 하고 다시 보지 않았고, 조금 복잡하거나 어려워보이는 문제는 지레 겁을 먹고 풀기를 꺼리는 등) 그래서인지 처음 책을 접했을 때는 문제를 풀고 풀이과정을 해설지와 일일이 대조해보고 백지에 다시 풀이과정을 써보느라 한 문제를 푸는데도 시간이 오래 걸렸고, 생각보다 쉽게 풀리지 않는 문제들이 많아서 충격을 받기도 했습니다. 그럴 때마다 앞부분에 실려있는, 과거 이 책으로 공부했던 다른 분들의 후기를 읽으며 잘 하고 있는거라고 스스로를 다독였습니다. 그러다보니 뒤로 갈수록 문제가 조금씩 풀리기 시작했고, 처음 풀어서 완벽히 맞는 문제가 나오면 (책 앞부분에 선생님께서 언급하신) 희열을 느끼기도 했습니다. 그렇게 1회독을 하고 나니 다른 모의고사를 볼 때에도 규토를 풀며 체계적으로 훈련했던 감각들이 되살아나서 예전이라면 손도 못 대었을 문제도 풀 수 있게 되었습니다.

책 제목인 라이트와 다르게, 문제들이 분명 쉽지만은 않은 것은 사실입니다. 그렇지만 시간이 오래 걸리더라도 책에 실린 방법대로 끈질기게 물고 늘어지고 스스로에게 엄격해진다면 분명 이 책이 끝날 시점에는 실력 향상이 있을거라고 자신합니다. 늘 고민을 안겨주는 과목이었던 수학을 하면 되는 과목으로 생각할 수 있도록 좋은 책 집필해주신 규토선생님께 진심으로 감사드리고 내년 수능을 준비하시는 분들에게도 이 책을 추천합니다. (규토 고득점 N제도 추천합니다.!!)

참고로 모든 추천사는 라이트 N제 구매 인증과 성적표 인증 후 수록하였습니다.

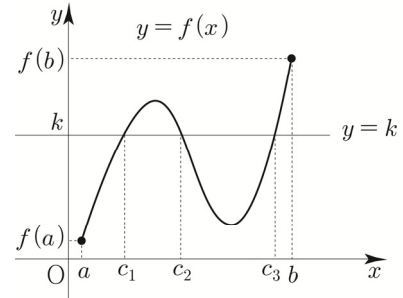
자세한 인증내역은 네이버 카페 (규토의 가능세계)에서 확인하실 수 있습니다.

개념 파악하기 (5) 사잇값의 정리란 무엇일까?

사잇값의 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 이 구간에서
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 끊어지지 않고 연결되어 있다.

따라서 $f(a) \neq f(b)$ 일 때, 오른쪽 그림과 같이
 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k 에 대하여
직선 $y=k$ 와 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 적어도 한 점에서
만난다는 것을 알 수 있다.



사잇값의 정리 요약

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 일 때,
 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이에 있는 임의의 값 k 에 대하여 $f(c)=k$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

Tip 사잇값을 이용할 때는 주어진 전제조건들을 잘 살펴보아야 한다.
즉, a 와 b 사이의 구간은 닫힌구간이어야 하고, 그 구간 안에서 함수 $f(x)$ 는 연속이어야 하며
 $f(a) \neq f(b)$ 이어야 한다. 이러한 전제 조건들 중 어느 하나라도 만족하지 않을 때
사잇값의 정리를 이용할 수 없다.

사잇값의 정리의 활용

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a)f(b) < 0$ 이면
사잇값의 정리에 의하여 $f(c)=0$ 인
 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

Tip 1 실전적으로 볼 때, 사잇값의 정리보다는 사잇값의 정리의 활용을 기억하는 편을 추천한다.

Tip 2 사잇값의 정리의 활용에서 $f(a)f(b) < 0$ 라는 말은 $f(a)$ 와 $f(b)$ 의 부호가 다르다는 뜻이다.
만약 $f(a)f(b) > 0$ 즉, $f(a)$ 와 $f(b)$ 의 부호가 같다면 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 (a, b) 에서
실근이 존재하지 않을 수도 있다.

Tip 3 사잇값의 정리는 c 가 정확히 무엇인지 혹은 c 가 몇 개 존재하는지가 궁금한 것이 아니라
전제조건을 만족시키기만 하면 Simple하게
“ c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.”라는 말을 하고 싶은 것이다.

Tip 4 구간을 쪼개서 사잇값의 정리를 사용하는 문제가 출제될 수도 있다.

예를 들어 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 연속이고 $f(1) > 0$, $f(2) < 0$, $f(3) > 0$ 이라 할 때, 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(1, 3)$ 에서 적어도 몇 개의 실근을 가지는지 판단해보자.

관성적으로 접근하면 $f(1)f(3) < 0$ 이 아니라서 난감할 수 있는데 이 때, 닫힌구간 $[1, 3]$ 을 $[1, 2]$ 와 $[2, 3]$ 로 쪼개서 생각해볼 수 있다.

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 연속이므로 닫힌구간 $[1, 2]$, $[2, 3]$ 에서도 모두 연속이다.

$f(1)f(2) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의해서 $f(c_1) = 0$ 인

c_1 가 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재하고

마찬가지로 $f(2)f(3) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의해서 $f(c_2) = 0$ 인

c_2 가 열린구간 $(2, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(1, 3)$ 에서 적어도 두 개의 실근을 갖는다.

Tip 5 만약 방정식이 $f(x) = 0$ 꼴이 아니라면 방정식을 변형하여 $f(x) = 0$ 꼴로 만들자.

예를 들어 방정식 $g(x) = 1$ 를 방정식 $g(x) - 1 = 0$ 로 변형한 뒤

$g(x) - 1 = f(x)$ 라 치환하면 $f(x) = 0$ 꼴로 만들 수 있다.

그 다음 사잇값의 정리의 활용을 사용하면 된다.

예제 7

방정식 $x^3 + x = 3$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

| 풀이 |

$$x^3 + x = 3 \Rightarrow x^3 + x - 3 = 0$$

$f(x) = x^3 + x - 3$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고

$f(1) = -1 < 0$, $f(2) = 7 > 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c) = 0$ 인

c 가 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3 + x = 3$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

개념 확인문제 7

방정식 $x^4 - x - 1 = 0$ 은 열린구간 $(0, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보이시오.

Training – 1 step

필수 유형편

2. 함수의 연속

1 Theme 함수의 연속

001

--	--	--	--	--

함수 $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & (x < 1) \\ x^2+a & (x \geq 1) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

002

--	--	--	--	--

함수 $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & (x \neq 2) \\ a & (x = 2) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

003

--	--	--	--	--

함수 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax-2}{x-1} & (x \neq 1) \\ b & (x = 1) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 상수이다.)

004

--	--	--	--	--

함수 $f(x) = \begin{cases} -x^2+x & (|x| > 1) \\ x^2+ax+b & (|x| \leq 1) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a-4b$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 상수이다.)

005

--	--	--	--	--

함수 $f(x) = \frac{2x-1}{ax^2+ax+2}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 정수 a 의 개수를 구하시오.

006

--	--	--	--	--

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 $(x-2)f(x) = x^2+ax+4$ 를 만족시킬 때, $f(2)+f(3)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

007

--	--	--	--	--

함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & (x < 2) \\ ax - 1 & (x \geq 2) \end{cases}$ 에 대하여

함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 실수 a 의 합을 구하시오.

008

--	--	--	--	--

함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 + a + 1 & (x < a) \\ 2a + 3 & (x \geq a) \end{cases}$ 가 실수 전체의

집합에서 연속이고 $\lim_{x \rightarrow 2a} f(x) < 5$ 일 때,

$f(a-2)$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.)

2Theme 연속함수의 성질

009

--	--	--	--	--

두 함수

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 5 & (x < 3) \\ 2 & (x \geq 3) \end{cases}, \quad g(x) = ax - 9$$

에 대하여 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 가 실수 전체의 집합에서

연속일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

010

--	--	--	--	--

함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x)$ 를 만족시키고,

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax + b & (-2 \leq x < 0) \\ ax + 3 & (0 \leq x < 2) \end{cases} \text{이다.}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

Guide step

개념 익히기편

1. 미분계수와 도함수

01 미분계수

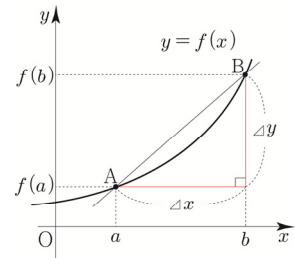
성취 기준 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.
미분계수의 기하적 의미를 이해한다.
미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.

개념 파악하기 (1) 평균변화율이란 무엇일까?

평균변화율

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때, y 의 값은 $f(a)$ 에서 $f(b)$ 까지 변한다.
이때 x 의 값의 변화량 $b-a$ 를 x 의 **증분**, y 의 값의 변화량 $f(b)-f(a)$ 를 y 의 **증분**이라 하고, 이것을 기호로 각각 Δx , Δy 와 같이 나타낸다.

즉, $\Delta x = b - a$, $\Delta y = f(b) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ 이다.



Tip 기호 Δ 는 Difference(차)의 머리글자 D에 해당하는 그리스 문자로, 'delta'라고 읽는다.

x 의 증분 Δx 에 대한 y 의 증분 Δy 의 비율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \text{를 } x \text{의 값이 } a \text{에서 } b \text{까지 변할 때,}$$

함수 $y = f(x)$ 의 **평균변화율**이라고 한다.

Tip 평균변화율은 두 점 $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기와 같다.

예제 1

함수 $f(x) = x^2 + 2$ 에서 x 의 값이 다음과 같이 변할 때, 평균변화율을 구하시오.

(1) 1에서 2까지

(2) 2에서 $2 + \Delta x$ 까지

| 풀이 |

$$(1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{6 - 3}{1} = 3$$

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{(2 + \Delta x)^2 + 2 - 6}{\Delta x} = \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

개념 확인문제 1

함수 $f(x) = x^2 + x$ 에서 x 의 값이 다음과 같이 변할 때, 평균변화율을 구하시오.

(1) 1에서 3까지

(2) 1에서 $1 + \Delta x$ 까지

Master step

심화 문제편

1. 미분계수와 도함수

077

--	--	--	--	--

연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여

$$f(2x+1) = f(x) + 3x^2 - ax \text{ 이다.}$$

(나) 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 $-\frac{1}{2}$ 에서 3까지

변할 때의 평균변화율은 b 이다.

$10(b-a)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

078 2015년 고3 3월 교육청 B형

--	--	--	--	--

삼차함수 $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 1$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ f(2k-x) & (x < k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서

미분가능하도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합을 $\frac{q}{p}$ 라 할 때,

$p^2 + q^2$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

079

--	--	--	--	--

함수 $f(x) = x^3 - 3x$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ f(x-a)+b & (x < 0) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(나) 실수 t 에 대하여 방정식 $g(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$ 라 할 때,

$$\lim_{t \rightarrow c+} h(t) + h(c) = \lim_{t \rightarrow c-} h(t) \text{ 이다.}$$

$a+2b+3c$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, c 는 상수이다.)

Guide step

개념 익히기편

2. 도함수의 활용

01 접선의 방정식

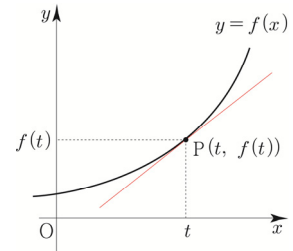
성취 기준 접선의 방정식을 구할 수 있다.

개념 파악하기 (1) 접선의 방정식은 어떻게 구할까?

접선의 방정식 유형 ① 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식

함수 $f(x)$ 가 $x=t$ 에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는 $x=t$ 에서의 미분계수 $f'(t)$ 와 같다.

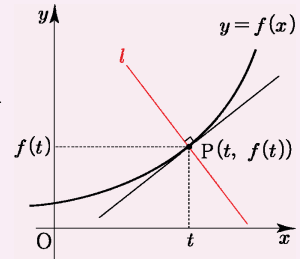
따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서 접하는 접선은 점 $(t, f(t))$ 를 지나고 기울기가 $f'(t)$ 인 직선이므로 접선의 방정식은 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 이다.



Tip 1 점 (a, b) 를 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은 $y=m(x-a)+b$ 이다.

Tip 2 수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t, f(t))$ 를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선 l 의 방정식은

$$y = -\frac{1}{f'(t)}(x-t)+f(t) \text{ (단, } f'(t) \neq 0 \text{) 이다.}$$



예제 1

다음 물음에 답하시오.

- 곡선 $y=x^2+x+2$ 위의 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 방정식을 구하시오.
- 곡선 $y=2x^2-x$ 위의 점 $(-1, 3)$ 를 지나고 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

| 풀이 |

(1) $f(x)=x^2+x+2$ 라 하면 $f'(x)=2x+1$

점 $(1, 4)$ 에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(1)=3$ 이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=3(x-1)+4$ 이므로 $y=3x+1$ 이다.

(2) $f(x)=2x^2-x$ 라 하면 $f'(x)=4x-1$

점 $(-1, 3)$ 에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(-1)=-5$

이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기를 m 이라 하면 $f'(-1) \times m = -1$ 이므로 $m = -\frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{5}$

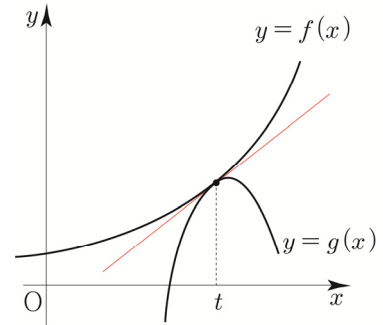
따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{5}(x+1)+3$ 이므로 $y=\frac{1}{5}x+\frac{16}{5}$ 이다.

접선의 방정식 유형 ④ 두 곡선에 동시에 접하는 접선

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 에 동시에 접하는 직선은 다음과 같이 case분류할 수 있다.

(1) 접점의 x 좌표가 동일한 경우

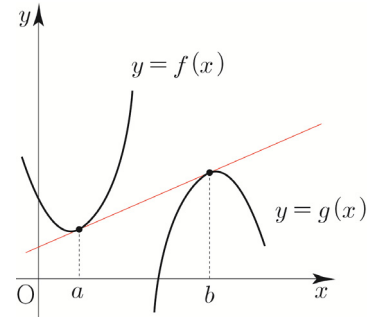
두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능할 때,
 $x=t$ 에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 에 동시에
 접하는 직선의 방정식은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의
 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(t, g(t))$ 에서의 접선이 서로 일치하므로
 다음과 같은 방법으로 구한다.



- ① $x=t$ 에서의 함수값이 같다. $\Rightarrow f(t)=g(t)$
 ② $x=t$ 에서의 접선의 기울기가 같다. $\Rightarrow f'(t)=g'(t)$

(2) 접점의 x 좌표가 동일하지 않은 경우

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능할 때,
 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 에 동시에
 접하는 직선의 방정식은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선과
 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(b, g(b))$ 에서의 접선이 서로 일치한다.
 $y=f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수, $y=g(x)$ 의 $x=b$ 에서의 미분계수,
 두 점 $(a, f(a))$ 와 $(b, g(b))$ 를 지나는 직선의 기울기가 모두 같으므로
 다음과 같은 방법으로 구한다. (단, $a \neq b$)



$$f'(a) = g'(b) = \frac{g(b) - f(a)}{b - a}$$

Tip $y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(a)x - af'(a) + f(a)$ 와
 $y = g'(b)(x-b) + g(b) = g'(b)x - bg'(b) + g(b)$ 가 같아야 하므로

- ① 기울기가 같다. $\Rightarrow f'(a) = g'(b)$
 ② y 절편이 같다. $\Rightarrow -af'(a) + f(a) = -bg'(b) + g(b)$
 $\Rightarrow -af'(a) + f(a) = -bf'(a) + g(b) \quad (\because f'(a) = g'(b))$
 $\Rightarrow f'(a) = \frac{g(b) - f(a)}{b - a} \quad (\because a \neq b)$

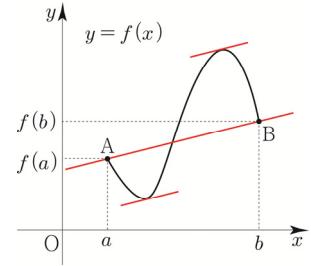
따라서 $f'(a) = g'(b) = \frac{g(b) - f(a)}{b - a}$ 이다.

개념 파악하기 (3) 평균값 정리란 무엇일까?

평균값 정리

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \text{인 } c \text{가 열린구간 } (a, b) \text{에 적어도 하나 존재한다.}$$



Tip 1 평균값 정리는 열린구간 (a, b) 에서 직선 AB와 평행한 곡선 $y=f(x)$ 의 접선이 적어도 하나 존재함을 의미한다.

Tip 2 평균값 정리에서 $f(a)=f(b)$ 이면 두 점 $(a, f(a))$ 와 $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기는 0이므로 평균값 정리는 롤의 정리를 일반화한 것이다.

Tip 3 평균값 정리에서 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고, 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하다는 조건 중 어느 하나라도 만족하지 않으면 평균값 정리가 성립하지 않는다.

(1) 불연속인 함수

$$\text{함수 } f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases} \text{는 열린구간 } (0, 1) \text{에서 미분가능하고}$$

$$f(0)=0, f(1)=1 \text{이므로 } \frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1 \text{이지만 } 0 < c < 1 \text{인 모든 } c \text{에 대하여}$$

$$f'(c)=0 \text{이다. 따라서 } f'(c)=1 \text{을 만족시키는 실수 } c \text{가 열린구간 } (0, 1) \text{에 존재하지 않는다.}$$

(2) 미분가능하지 않은 함수

$$\text{함수 } f(x)=|x| \text{은 닫힌구간 } [-1, 2] \text{에서 연속이지만 } -1 < c < 2 \text{인 } c \text{에 대하여}$$

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3} \text{을 만족시키는 실수 } c \text{는 존재하지 않는다.}$$

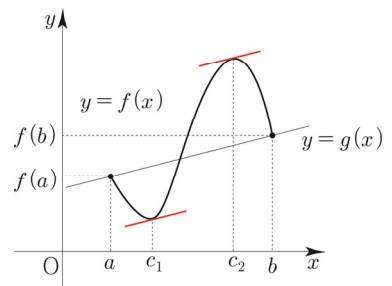
평균값 정리 증명

평균값 정리를 증명해보자.

곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의

방정식을 $y=g(x)$ 라고 하면 $g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ 이다.

이때 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면 $h(x)$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하며 $h(a)=h(b)=0$ 이다.



따라서 롤의 정리를 이용하면

$$h'(c) = f'(c) - g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \text{인 } c \text{가 열린구간 } (a, b) \text{에 적어도 하나 존재한다.}$$

$$\text{즉, } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \text{인 } c \text{가 열린구간 } (a, b) \text{에 적어도 하나 존재한다.}$$

Tip 평균값 정리는 함수의 그래프를 이용하여 직관적으로 이해하면 되고 만약 1회독 중인 학생이라면 증명과정은 넘어가도 된다.

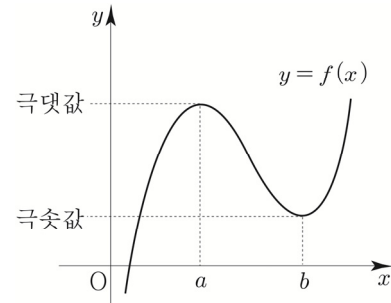
개념 파악하기 (6) 함수의 극대와 극소란 무엇일까?

극대와 극소

함수 $f(x)$ 에서 $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여

① $f(x) \leq f(a)$ 이면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **극대**가 된다고 하고,
그 때의 함수값 $f(a)$ 를 **극댓값**이라고 한다.

② $f(x) \geq f(a)$ 이면 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **극소**가 된다고 하고,
그 때의 함수값 $f(a)$ 를 **극솟값**이라고 한다.



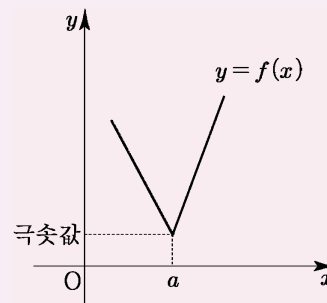
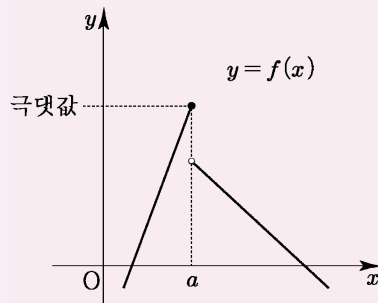
극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.

Tip 1 $x=a$ 를 포함하는 어떤 열린구간이라는 뜻은
 $x=a$ 를 포함하는 아주 작은 열린구간이라고 생각하면 된다.

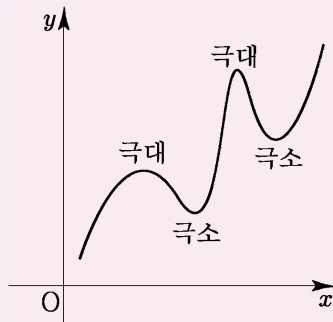
Tip 2 극대 극소의 정의를 보면 $f(x)$ 가 연속이나 미분가능해야 한다는 전제조건이 없다.
따라서 불연속 혹은 미분가능하지 않아도 함수값만 존재한다면 극대와 극소가 존재할 수 있다.

ex $x=a$ 에서 불연속해도 $x=a$ 에서 극대

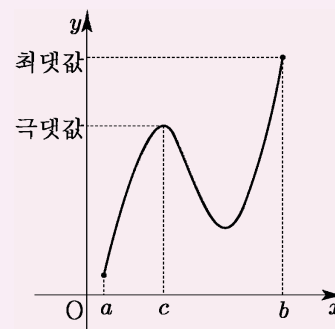
ex $x=a$ 에서 미분가능하지 않아도 $x=a$ 에서 극소



Tip 3 극대와 극소는 여러 개 존재할 수 있고
극댓값이 극솟값보다 항상 큰 것은 아니다.



Tip 4 극댓값(극솟값)이 꼭 최댓값(최솟값)은 아니다.



Tip 5 $f(x)$ 가 상수함수라면 $x=a$ 에서 극값을 갖는 a 는 무수히 많다.
이때 함수값 $f(a)$ 는 극댓값도 되고 극솟값도 된다.

04 함수의 그래프

성취 기준 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

개념 파악하기 (7) 함수의 그래프의 개형은 어떻게 그릴까?

함수의 그래프의 개형 그리기

미분가능한 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같은 과정으로 그릴 수 있다.

- ① 도함수 $f'(x)$ 를 그린다.
- ② $f'(x)$ 의 부호를 판단하여 증감을 고려한 대략적인 $f(x)$ 를 그린다.
- ③ 극댓값 or 극솟값 or x 절편 or y 절편 등을 고려하여 디테일하게 함수값을 표시한다.
- ④ 최종적으로 ②+③를 고려하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그린다.

Tip 1 ①에서 $f'(x)$ 의 부호만 판단하면 되므로 $f'(x)$ 를 그릴 때, y 축은 생략가능하다.

Tip 2 $f'(x)$ 의 부호만 판단하면 되므로 $f'(x)$ 에서 항상 양수인 부분은 고려하지 않아도 된다.

ex1 $f'(x) = 10x(x-1)$ 이라면 $f'(x) = x(x-1)$ 라 두고 판단해도 된다.

ex2 $f'(x) = (x^2+1)x$ 이라면 $f'(x) = x$ 라 두고 판단해도 된다.

이때 두 번째 $f'(x)$ 를 Semi 도함수라고 하자. (소통을 위한 필자와의 약속)

Tip 3 위와 같은 방식 즉, 증감표를 그리지 않고 $f'(x)$ 를 그려서 $f'(x)$ 의 부호를 판단하려면 x 절편을 바탕으로 3차 이상의 다항함수를 빨리 그릴 수 있어야 한다. (방법은 아래와 같다.)

x 절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 [1단계] - 시작 방향 정하기

① 홀수차 함수 ex) 일차함수, 삼차함수....

(i) 최고차항의 계수가 양수일 때, 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.

(ii) 최고차항의 계수가 음수일 때, 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.



Tip 일차함수를 생각하면 된다.

② 짝수차 함수 ex) 이차함수, 사차함수....

(i) 최고차항의 계수가 양수일 때, 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.

(ii) 최고차항의 계수가 음수일 때, 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.



Tip 이차함수를 생각하면 된다.

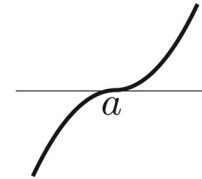
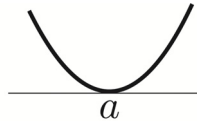
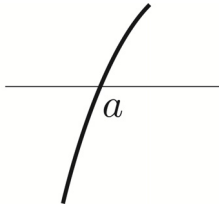
x 절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 [2단계] - x 절편 이용하기

$f(x)$ 가 $(x-a)^n$ 을 인수로 가질 때, n 에 따라 case분류할 수 있다.

① $n=1 \Rightarrow (x-a)$

② $n=2 \Rightarrow (x-a)^2$ ($n \geq 2$ 인 짝수)

③ $n=3 \Rightarrow (x-a)^3$ ($n \geq 3$ 인 홀수)

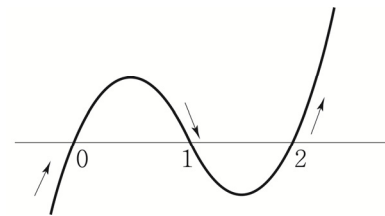


Tip ②은 스치는 접선형태(스접)를 갖고, ③은 뚫는 접선형태(뚫접)를 갖는다.
쉽게 말해서 ②은 $y=x^2$ 같은 느낌이고, ③은 $y=x^3$ 같은 느낌이다.

x 절편을 이용해 다항함수 빨리 그리기 [3단계] - 실전연습

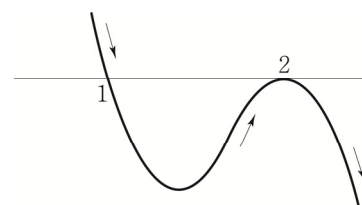
ex1 $y = x(x-1)(x-2)$

- ① 삼차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.
- ② x 절편이 0, 1, 2이고 x , $(x-1)$, $(x-2)$ 를 인수로 가지므로 $x=0, 1, 2$ 을 통과해서 그려주면 된다.



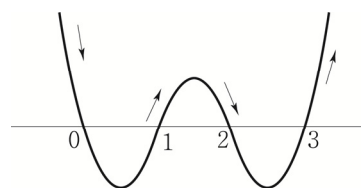
ex2 $y = -(x-1)(x-2)^2$

- ① 삼차함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.
- ② x 절편이 1, 2이고 $(x-1)$, $(x-2)^2$ 를 인수로 가지므로 $x=1$ 를 통과하고 $x=2$ 에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



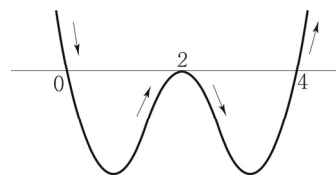
ex3 $y = x(x-1)(x-2)(x-3)$

- ① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.
- ② x 절편이 0, 1, 2, 3이고 x , $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ 를 인수로 가지므로 $x=0, 1, 2, 3$ 을 통과해서 그려주면 된다.



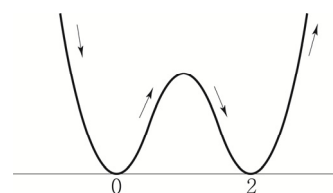
ex4 $y = x(x-2)^2(x-4)$

- ① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.
- ② x 절편이 0, 2, 4이고 x , $(x-2)^2$, $(x-4)$ 를 인수로 가지므로 $x=0, 4$ 를 통과하고 $x=2$ 에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



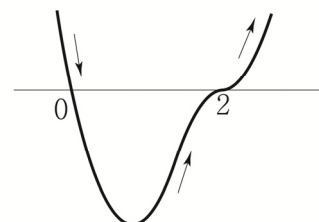
ex5 $y = x^2(x-2)^2$

- ① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.
- ② x 절편이 0, 2이고 x^2 , $(x-2)^2$ 를 인수로 가지므로 $x=0, 2$ 에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



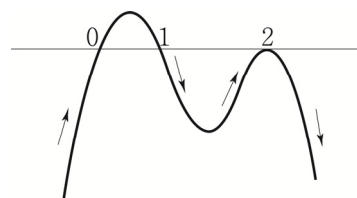
ex6 $y = x(x-2)^3$

- ① 사차함수이고 최고차항의 계수가 양수이므로 위에서 아래로 감소하는 방향으로 시작한다.
- ② x 절편이 0, 2이고 x , $(x-2)^3$ 를 인수로 가지므로 $x=0$ 를 통과하고 $x=2$ 에서 뚫는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



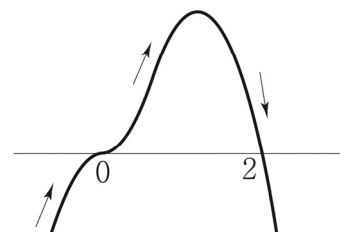
ex7 $y = -x(x-1)(x-2)^2$

- ① 사차함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.
- ② x 절편이 0, 1, 2이고 x , $(x-1)$, $(x-2)^2$ 를 인수로 가지므로 $x=0, 1$ 를 통과하고 $x=2$ 에서 스치는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



ex8 $y = -x^3(x-2)$

- ① 사차함수이고 최고차항의 계수가 음수이므로 아래에서 위로 증가하는 방향으로 시작한다.
- ② x 절편이 0, 2이고 x^3 , $(x-2)$ 를 인수로 가지므로 $x=2$ 를 통과하고 $x=0$ 에서 뚫는 접선을 갖도록 그려주면 된다.



07 삼차함수와 사차함수의 그래프 (심화특강)

성취 기준

삼차함수와 사차함수의 그래프의 개형을 설명할 수 있다.

삼차함수와 사차함수의 특징을 설명할 수 있다.

식세우기 Technic을 이용하여 삼차함수와 사차함수에 관한 식을 빠르게 세울 수 있다.

개념 파악하기

(12) 곡선의 오목과 볼록은 어떻게 알 수 있을까?

이계도함수

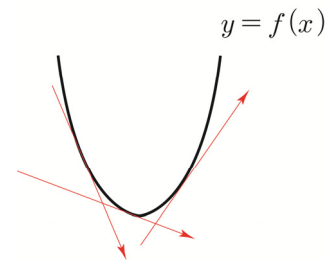
함수 $f'(x)$ 의 도함수를 함수 $y=f(x)$ 의 **이계도함수**라 하고 기호로 $f''(x)$ 와 같이 나타낸다.

곡선의 오목과 볼록

함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에서

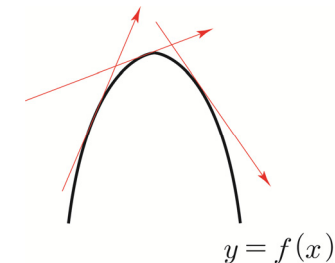
- ① $f''(x) > 0$ 이면 $f'(x)$ 는 증가하므로 곡선 $y=f(x)$ 의 접선의 기울기도 증가한다. 따라서 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

ex $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2 > 0$



- ② $f''(x) < 0$ 이면 $f'(x)$ 는 감소하므로 곡선 $y=f(x)$ 의 접선의 기울기도 감소한다. 따라서 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 는 이 구간에서 위로 볼록하다.

ex $f(x) = -x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x \Rightarrow f''(x) = -2 < 0$



Tip 1 $f''(x)$ 는 $f'(x)$ 의 도함수이므로 $f''(x)$ 의 부호로 $f'(x)$ 의 증감을 파악할 수 있다.

Tip 2 사실 이계도함수는 수2가 아닌 미적분에서 배우는 내용이다.

하지만 이계도함수를 학습하고 나면 삼차함수와 사차함수를 가볍게 위에서 내려다 볼 수 있다.

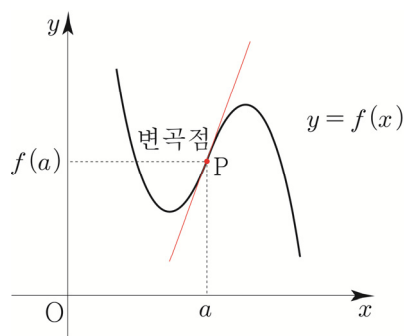
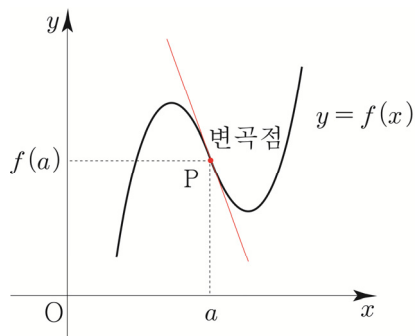
그렇게 어려운 개념도 아니고 학습하는 것을 추천한다.

변곡점

곡선의 모양이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$ 를 경계로 하여 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 바뀌거나 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀔 때, 점 P 를 곡선 $y=f(x)$ 의 **변곡점**이라 한다.

즉, 함수 $f(x)$ 에서 $f''(a)=0$ 이고, $x=a$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌면

점 $(a, f(a))$ 는 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.



Tip 1 $f''(a)=0$ 이면 항상 변곡점일까? 답은 “아니다.”이다. 예를 들어 $f(x)=x^4$ 는 $f''(0)=0$ 이지만 $x=0$ 의 좌우에서 $f''(x)>0$ 이므로 점 $(0, 0)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이 아니다.

Tip 2 특별히 변곡점에서의 접선을 **변곡점선**이라 부른다.

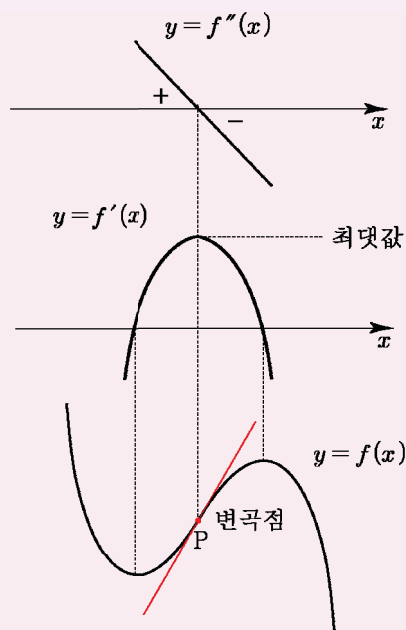
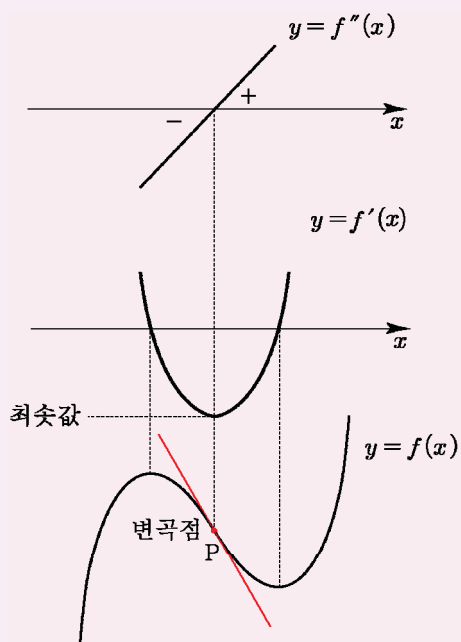
참고로 수2에서도 변곡점선을 출제하기 시작했으니 이번 기회에 확실히 알아두자.

특히 삼차함수에서의 변곡점선은 접선들 중 기울기가 $f(x)$ 의 최고차항의 계수의 부호에 따라 제일 작거나 제일 크기 때문에 출제하기 아주 좋은 포인트이다.

(곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$ 에서 접하는 접선의 기울기는 $f'(a)$ 와 같다.)

① $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수

② $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수

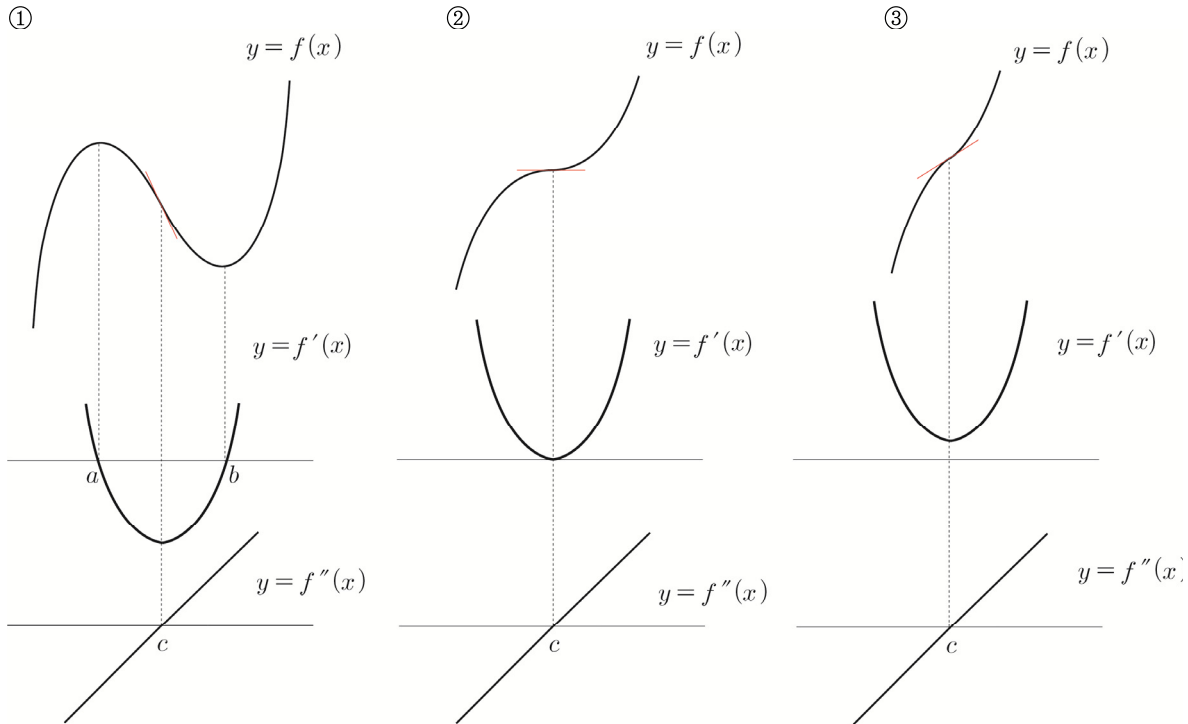


개념 파악하기

(13) 삼차함수의 그래프는 어떠한 특징을 가지고 있을까?

삼차함수의 그래프의 개형

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f'(x)=0$ 의 실근의 개수에 따라 case분류할 수 있다.



Tip 1 위의 세 유형은 머릿속에 완벽히 각인 시켜야한다. 삼차함수 개형은 몇 가지? 3가지!

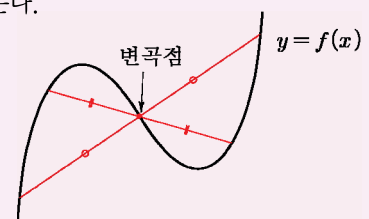
Tip 2 ①에서 $(c, f(c))$ 가 $y=f(x)$ 의 변곡점이다. $y=f''(x)$ 를 그리지 않고도 $y=f(x)$ 의 변곡점을 찾을 수 있다. $x=c$ 에서 $f''(x)$ 의 부호가 변하므로 $x=c$ 에서 $f'(x)$ 는 극값을 갖는다. 즉, $f'(x)$ 가 극값을 갖는 점의 x 값이 $y=f(x)$ 의 변곡점의 x 값이 된다.

Tip 3 (1) 증가함수 (2) 감소함수 (최고차항의 계수가 음수일 때) (3) 일대일 대응 (4) 역함수 존재 (5) 극값 존재 X
 \Rightarrow ②, ③ 개형
 \Rightarrow 방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 서로 다른 두 허근을 해로 갖는다. (판별식 $D \leq 0$)

Tip 4 ③에서 $y=f'(x)$ 의 꼭짓점의 x 좌표가 c 이므로 $(c, f(c))$ 은 $y=f(x)$ 의 변곡점이다.

Tip 5 삼차함수를 두 번 미분하면 일차함수이므로 $f''(x)=Ax+B$ 는 반드시 x 축과 만나고, x 축과 만나는 점을 경계로 부호가 변하므로 모든 삼차함수는 변곡점을 갖는다.

Tip 6 모든 삼차함수는 변곡점에 대하여 대칭되어 있다.



삼차함수의 변곡점임을 알려주는 식

(i) $f(x) + f(2a - x) = 2b$

위의 식은 $f(x)$ 는 점 (a, b) 에 대칭되어 있다는 뜻이다. 모든 삼차함수는 변곡점에 대하여 대칭되어 있으므로 (a, b) 는 $y = f(x)$ 의 변곡점이다.

(ii) $f(x)$ 가 삼차함수일 때, $f'(x)$ 는 $x = a$ 에서 음수인 최솟값을 갖는다.

$f'(x)$ 가 $x = a$ 에서 최솟값, 최댓값을 갖는다는 의미는 $f'(x)$ 의 꼭짓점의 x 좌표가 a 라는 의미이므로 $(a, f(a))$ 가 $y = f(x)$ 의 변곡점임을 알려주지만

굳이 음수라고 한 이유는 극대와 극소를 모두 가지고 있는 삼차함수의 개형(①개형)임을 알려주기 위함이다.

(iii) $f(x)$ 가 삼차함수일 때, $f'(x) = f'(2a - x) \Leftrightarrow f'(a - x) = f'(a + x)$

$f'(x)$ 가 $x = a$ 에 대하여 대칭되어 있다는 의미이다. 즉, $f'(x)$ 의 꼭짓점의 x 좌표가 a 이므로 $(a, f(a))$ 는 $y = f(x)$ 의 변곡점이다.

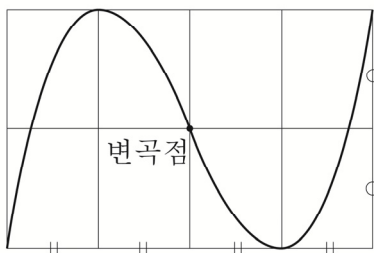
(iv) $f(x)$ 가 삼차함수일 때, $f'(1) = 0, f'(3) = 0$

$f'(x)$ 는 이차함수이므로 꼭짓점의 x 좌표는 $x = 1$ 과 $x = 3$ 의 중점인 $x = 2$ 이다.

따라서 $(2, f(2))$ 는 $y = f(x)$ 의 변곡점이다.

삼차함수의 비율관계

모든 삼차함수는 아래 BOX에 넣을 수 있다.



Tip 1 작은 사각형은 직사각형이 될 수도 있고 정사각형이 될 수도 있다.

즉, 문제조건에 따라 달라진다.

Tip 2 위 BOX를 통해 자연스럽게 삼차함수의 비율관계를 알 수 있다.

극값차 공식

$f'(x)$ 가 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_{\alpha}^{\beta} |f'(x)| dx = S$ (표현형)

$\int_{\alpha}^{\beta} -f'(x) dx = f(\alpha) - f(\beta)$ 이므로 넓이 S 는 극값차이다.

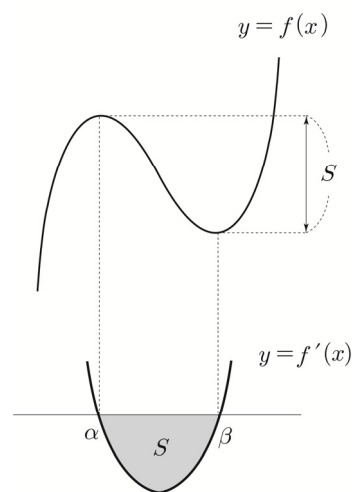
여기서 넓이 S 를 구할 때 우리가 자주 쓰는 적분 공식을 적용시켜보자.

$f'(x)$ 의 최고차항의 계수를 A 라고 하면 $S = \frac{|A|}{6}(\beta - \alpha)^3$

여기서 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a 라 하면 $3a = A$ 이므로

즉, $S = \frac{|a|}{2}(\beta - \alpha)^3$ 이다.

따라서 극값차 $= \frac{|a|}{2}(\beta - \alpha)^3$ 이다.



Tip 적분을 배우지 않은 학생은 우선 공식만이라도 외워두도록 하자.
계산과정을 현격하게 줄여줄 수 있으니 외우는 것을 추천한다.

ex 삼차함수 $f(x) = 4x^3 + ax^2 + bx + c$ 가 $x=1, x=2$ 에서 극값을 가지고 $f(1)=10$ 일 때,
 $f(2)$ 의 값을 구하시오.

$f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고, $x=2$ 에서 극소이므로

$$f(1) - f(2) = \frac{|4|}{2}(2-1)^3 \Rightarrow f(2) = 10 - 2 = 8$$

Tip 물론 $f'(1)=0, f'(2)=0, f(1)=10$ 을 이용하여 상수 a, b, c 를 찾아서 $f(2)$ 를 구해도 된다.

식세우기 Technic

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1일 때,

① $f(1)=f(2)=f(3)$

$$f(1)=f(2)=f(3)=k \text{ 라 두면 } f(1)-k=0, f(2)-k=0, f(3)-k=0$$

$$f(x)-k=g(x) \text{ 라 하면 } g(1)=0, g(2)=0, g(3)=0 \text{ 을 만족하므로}$$

$g(x)$ 는 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 를 인수로 갖는다.

$-k$ 는 $f(x)$ 의 최고차항의 계수에 영향을 끼치지 않으므로 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$$\text{따라서 } g(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f(x) - k = (x-1)(x-2)(x-3) \text{ 이다.}$$

② $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3$

$$f(1)-1=0, f(2)-2=0, f(3)-3=0$$

$$f(x)-x=g(x) \text{ 라 하면 } g(1)=0, g(2)=0, g(3)=0 \text{ 을 만족하므로}$$

$g(x)$ 는 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 를 인수로 갖는다.

$-x$ 는 $f(x)$ 의 최고차항의 계수에 영향을 끼치지 않으므로 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$$\text{따라서 } g(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f(x) - x = (x-1)(x-2)(x-3) \text{ 이다.}$$

③ 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$

기함수이므로 x^n (n 은 홀수)만 존재해야 한다. 즉, $f(x) = x^3 - ax$ 이다.

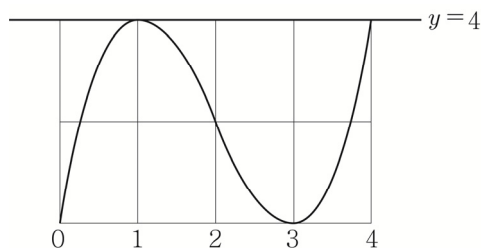
Tip 만약 $f(x) = x^3 + ax$ 라 두면 $f'(x) = 3x^2 + a$ 이므로

방정식 $f'(x) = 3x^2 + a = 0$ 의 해가 $x = \pm \sqrt{\frac{-a}{3}}$ 이 된다. 물론 $a < 0$ 라는 전제 조건을 사용하여 식을 전개해도 되지만 루트 안에 $-$ 가 있어 실수하기 쉽다.

따라서 처음부터 $f(x) = x^3 - ax$ 라 두면 방정식 $f'(x) = 0$ 의 해가 $x = \pm \sqrt{\frac{a}{3}}$ ($a > 0$)이므로 실수할 여지를 줄일 수 있다.

물론 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 일 때는 $f(x) = x^3 + ax$ 라 두는 편이 좋긴 하지만 빈도수면에서 $f(x) = x^3 - ax$ 가 유리하다. (\because 극값을 갖는 개형의 빈도가 더 多)

④ $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때, 극댓값 4를 갖고, $x=3$ 일 때, 극솟값을 갖는다.
박스를 그리면 다음과 같다.



방정식 $f(x) = 4$ 는 $x=1$ 에서 중근과 $x=4$ 에서 하나의 실근을 갖는다.

$f(x) - 4 = g(x)$ 라 하면 방정식 $g(x) = 0$ 은 $x=1$ 에서 중근과 $x=4$ 에서 하나의 실근을 가지므로 $g(x)$ 는 $(x-1)^2(x-4)$ 를 인수로 갖는다.

따라서 $g(x) = (x-1)^2(x-4) \Rightarrow f(x) - 4 = (x-1)^2(x-4)$ 이다.

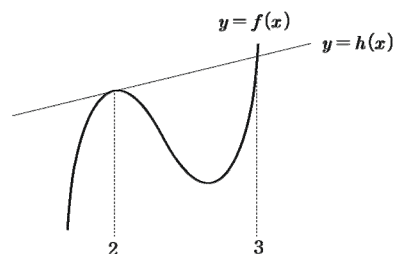
⑤ 직선 $h(x)$ 가 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여

$x=2$ 에서 접하고 $x=3$ 에서 $f(x)$ 와 만난다.

방정식 $f(x) = h(x)$ 는 $x=2$ 에서 중근 $x=3$ 에서 실근을 갖는다.

$f(x) - h(x) = g(x)$ 라 하면 방정식 $g(x) = 0$ 은 $x=2$ 에서 중근과 $x=3$ 에서 하나의 실근을 가지므로 $g(x)$ 는 $(x-2)^2(x-3)$ 를 인수로 갖는다.

따라서 $g(x) = (x-2)^2(x-3) \Rightarrow f(x) - h(x) = (x-2)^2(x-3)$ 이다.

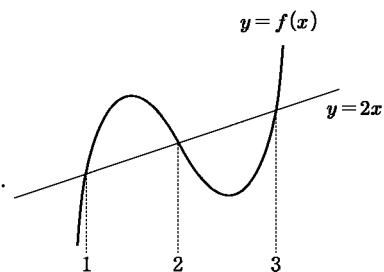


⑥ $y=2x$ 와 삼차함수 $f(x)$ 가 $x=1, 2, 3$ 에서 만난다.

$g(x) = f(x) - 2x$ 라 하면 $g(1) = 0, g(2) = 0, g(3) = 0$ 이므로

$g(x)$ 는 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 를 인수로 갖는다.

따라서 $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3) \Rightarrow f(x) - 2x = (x-1)(x-2)(x-3)$ 이다.



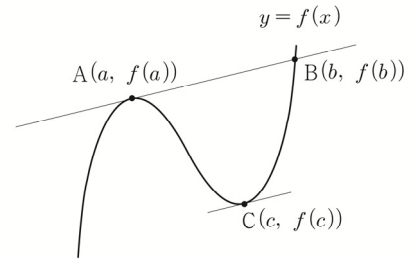
식세우기 응용

삼차함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 한 점 $A(a, f(a))$ 에서의 접선이 이 곡선과 만나는 점 중 접점이 아닌 점을 $B(b, f(b))$ 라 하자. 함수 $f(x)$ 의 구간 $[a, b]$ 에서의 평균변화율과 $x=c$ 에서의 접선의 기울기가 서로 같을 때, c 를 a, b 로 표현해보자.

$$f'(a) = f'(c) = m$$

접선의 방정식은 $y = f'(a)(x-a) + f(a) = g(x)$

최고차항의 계수 k 라 두고 식을 세우면 $f(x) - g(x) = k(x-a)^2(x-b)$



양변을 미분하면

$$f'(x) - g'(x) = 2k(x-a)(x-b) + k(x-a)^2 \Rightarrow f'(x) - m = 2k(x-a)(x-b) + k(x-a)^2$$

$$x=c \text{ 대입하면 } f'(c) - m = 2k(c-a)(c-b) + k(c-a)^2$$

$$0 = k(c-a)(2(c-b) + c-a) \Rightarrow 0 = k(c-a)(3c-2b-a)$$

$a \neq c$ 이므로 $c = \frac{a+2b}{3}$ 이다. 즉, c 는 선분 AB의 2:1 내분점의 x 좌표와 같다.

Tip 위에서 배운 박스를 이용하면 $c = \frac{a+2b}{3}$ 임이 자명하다.

Training – 1 step

필수 유형편

2. 도함수의 활용

1 Theme 접선의 기울기

001

--	--	--	--	--

곡선 $y = 2x^3 - ax^2 + 3x + b$ 가 점 $(1, 2)$ 를 지나고
이 점에서의 접선의 기울기가 -1 일 때, $a+b$ 의 값을
구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

002

--	--	--	--	--

곡선 $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$ 위의 두 점
 $(-1, 4), (1, -2)$ 에서의 접선이 서로 평행할 때,
 $a-3b+4c$ 의 값을 구하시오. (단, a, b, c 는 상수이다.)

003

--	--	--	--	--

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x^2-1} = 4$ 일 때,
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, a)$ 에서의 기울기는 m 이다.
 $a+m$ 의 값을 구하시오. (단, a, m 은 상수이다.)

004

--	--	--	--	--

곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ 의 접선의 기울기의 최솟값을
 m , 이때 접점의 좌표는 (a, b) 이다.
 $m+2a+3b$ 의 값을 구하시오. (단, m, a, b 는 상수이다.)

005

--	--	--	--	--

곡선 $y = -\frac{1}{3}x^3 + ax^2 + x + 1$ 의 접선의 기울기의
최댓값이 $2a$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오.

006

--	--	--	--	--

곡선 $y = x^3 - 3x + 2$ 에 접하는 직선의 기울기를 m 라
할 때, 접점의 개수를 $f(m)$ 이라 하자.
 $f(-3)+f(-1)+f(1)$ 의 값을 구하시오.

2Theme 접선의 방정식

(곡선 위의 점이 주어질 때)

007

곡선 $y = x^3 - 6x + 5$ 위의 점 $(-1, 10)$ 에서의 접선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 할 때, $m + 3n$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 상수이다.)

008

곡선 $y = -2x^3 + 4x$ 위의 점 $(1, a)$ 에서의 접선이 점 $(-5, b)$ 를 지날 때, ab 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

009

곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 2$ 위의 두 점 $(-1, -2), (1, 0)$ 에서의 접선을 각각 l_1, l_2 라 할 때, 두 직선 l_1, l_2 의 교점은 (a, b) 이다. $3a + b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

010

함수 $f(x) = x^3 - ax^2 + 4x$ 에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $P(0, f(0))$ 에서의 접선이 이 곡선과 만나는 점 중에서 P 가 아닌 점을 Q 라 하자. $\overline{PQ} = \sqrt{17}$ 일 때, 점 Q 의 y 좌표를 구하시오. (단, a 는 양의 상수이다.)

011

곡선 $y = x^3 - 2x^2 + 1$ 위의 점 $P(2, 1)$ 에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 Q 라 할 때, 삼각형 OPQ 의 넓이를 구하시오. (단, O 는 원점이다.)

012

곡선 $y = -2x^3 + 4x$ 위의 점 $(1, 2)$ 를 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식이 $y = ax + b$ 일 때, $4ab$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

013

곡선 $y = x^3 + ax + b$ 위의 점 $(2, -1)$ 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{7}$ 일 때, $b - 2a$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

014

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 3}{x^2 - 4} = -4$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$ 에서의 접선의 방정식은 $y = mx + n$ 이다. $m + 2n$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 상수이다.)

071

상수 $a(a > 0)$ 에 대하여

$$f(x) = \begin{cases} -x^3(x+4a) & (x < 0) \\ x^2(x-3a) & (x \geq 0) \end{cases}$$

의 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 부호가 서로 다를 때,
 $81a$ 의 값을 구하시오.

072

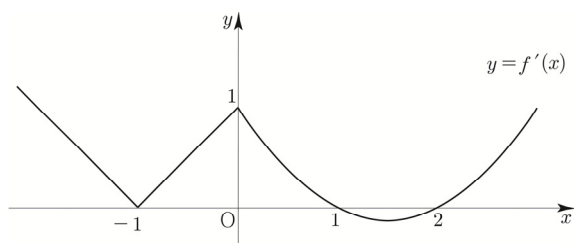
함수 $f(x)$ 의 도함수

$$f'(x) = \begin{cases} |x+1| & (x < 0) \\ \frac{1}{2}(x-1)(x-2) & (x \geq 0) \end{cases}$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.

| 보기 |

- ㄱ. 열린구간 $(-2, 3)$ 에서 $f'(x)$ 는 3개의 극값을 갖는다.
 ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 증가한다.
 ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 과 $x = 0$ 에서 미분가능하지 않다.
 ㄹ. 열린구간 $(-2, 3)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 2개의 극값을 갖는다.
 ㄴ. 두 함수 $y = f(x)$, $y = f(1)$ 의 그래프는 서로 다른 세 점에서 만난다.

12^{Theme} 함수의 극대, 극소의 활용

073

함수 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$ 는 $x = a$ 에서 극댓값

b 를 갖는다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$ 에서의
 접선을 l 이라 할 때, 점 (a, b) 와 직선 l 사이의 거리는
 d 이다. $10d^2$ 의 값을 구하시오.

074

다항함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$

(나) $x = 0$ 과 $x = 2$ 에서 극값을 갖는다.

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1-2h)}{h}$ 의 값을 구하시오.

075

최고차항의 계수가 자연수인 삼차함수 $f(x)$ 는 다음 조건을
 만족시킨다.

(가) 함수 $(x^2 + 2)f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극값 6을 갖는다.

(나) 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극값을 갖지 않는다.

(다) $\frac{12}{f'(2)}$ 는 자연수이다.

$f(4)$ 의 값을 구하시오.

110

--	--	--	--	--

수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t > 0)$ 에서의

위치 x 가 $x = \frac{1}{4}t^4 - t^3 - \frac{9}{2}t^2$ 이다.

$0 < t \leq 4$ 에서 점 P의 속도를 v 라 할 때,

$|v|$ 의 최댓값을 구하시오.

111

--	--	--	--	--

수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t > 0)$ 에서의

위치 x 가 $x = t^3 + at + b$ 이다. 점 P가 원점을 지날 때의

속도와 가속도가 각각 13, 12일 때, $a - b$ 의 값을

구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

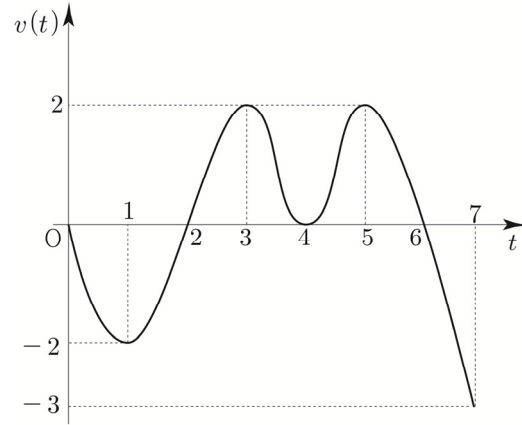
112

--	--	--	--	--

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의

시간 t 에서의 속도 $v(t)$ 의 그래프가 그림과 같을 때,

〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고르시오.



| 보기 |

- ㄱ. $t=1$ 일 때와 $t=3$ 일 때, 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.
- ㄴ. $0 < t < 7$ 일 때, 점 P의 가속도가 0이 되는 순간은 4번이다.
- ㄷ. $5 < t < 7$ 일 때, 점 P의 속도는 감소한다.
- ㄹ. $t=6$ 일 때, 점 P의 가속도는 음의 값이다.
- ㅁ. $t=2$ 일 때, 점 P는 원점을 지난다.
- ㅂ. 점 P는 7초 동안 운동 방향을 2번 바꾼다.
- ㅅ. $t=3$ 일 때, 점 P는 정지한다.
- ㅇ. $t=3$ 일 때와 $t=5$ 일 때, 점 P의 위치는 서로 같다.

4Theme 부정적분과 미분의 관계의 활용

015

--	--	--	--	--

다항함수 $f(x)$ 가 $\int f(x) dx + 2x^3 = xf(x)$ 를 만족시킨다. $f(0) = 2$ 일 때, $f(5)$ 의 값을 구하시오.

016

--	--	--	--	--

다항함수 $f(x)$ 가 $\int xf(x) dx + f(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 + x$ 를 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오.

017

--	--	--	--	--

다항함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $\int (x-1)f'(x) dx = (x-1)^3(x-3)$ 이고 $f(0) = 0$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오.

018

--	--	--	--	--

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ 이고, $F(x) + xf(x) = 4x^3 - 6x + 2$ 이다. 함수 $g(x) = \int F(x) dx$ 의 극솟값이 0일 때, $g(2)$ 의 값을 구하시오.

5Theme 부정적분과 함수의 연속성

019

--	--	--	--	--

함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $f'(x) = \begin{cases} 4x+1 & (x < 0) \\ k & (x \geq 0) \end{cases}$ 이고 $f(-1) = 0, f(1) = 1$

일 때, $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이 되도록 하는 상수 k 의 값을 구하시오.

020

--	--	--	--	--

연속함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $f'(x) = |x-1| + x$ 이고 $f(0) = 3$ 일 때, $f(-2) + f(2)$ 의 값을 구하시오.

021

--	--	--	--	--

연속함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & (|x| < 1) \\ 2 & (|x| > 1) \end{cases}$ 이고 $f(-2) = 3$ 일 때, $f(-2)f(0)f(2)$ 의 값을 구하시오.

12 Theme 정적분으로 정의된 함수 (New 함수)

055

--	--	--	--	--

함수 $f(x) = \int_{\sqrt{2}}^x \{3|t| - t\} dt$ 에 대하여

원점에서 곡선 $y = f(x)$ 에 접선을 그을 때,
접점을 A라 하자. \overline{OA}^2 의 값을 구하시오.
(단, 점 O는 원점이다.)

056

--	--	--	--	--

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x) = \int_{-1}^1 |t-x| dt$ 의

최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

057

--	--	--	--	--

함수 $f(x) = \begin{cases} -2x-2 & (x < 0) \\ x^2-x-2 & (x \geq 0) \end{cases}$ 에 대하여

방정식 $\int_a^x f(t) dt = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖도록

하는 상수 a 의 개수를 구하시오.

058

--	--	--	--	--

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 가

$g(x) = \int_0^x |f'(t)| dt$ 일 때, <보기>에서 옳은 것만을

있는 대로 고르시오.

| 보기 |

- ㄱ. $g(0) = 0$
- ㄴ. $0 < x < 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g'(x) + f'(x) = 0$ 이다.
- ㄷ. 모든 실수 a 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ 이다.
- ㄹ. 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
- ㅁ. $x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $g(x_1) < g(x_2)$ 이다.
- ㅂ. 함수 $g(x)$ 의 역함수는 존재하지 않는다.
- ㅅ. 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극값을 갖는다.
- ㅇ. 함수 $|g(x) - g(2)|$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
- ㅈ. $g(-1) + g(1) + g(4) = 22$

Training – 2 step

기출 적용편

1. 부정적분과 정적분

059 2020학년도 고3 9월 평가원 나형

--	--	--	--	--

$\int_0^2 (3x^2 + 6x) dx$ 의 값은? [3점]

- ① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

060 2018학년도 고3 9월 평가원 나형

--	--	--	--	--

함수 $f(x) = \int_1^x (t-2)(t-3) dt$ 에 대하여

$f'(4)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

061 2013년 고3 7월 교육청 A형

--	--	--	--	--

함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^2 - 2x + \int_0^1 t f(t) dt$ 를

만족시킬 때, $f(3)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{17}{6}$
④ $\frac{19}{6}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

062 2014학년도 수능 A형

--	--	--	--	--

실수 a 에 대하여

$$\int_{-a}^a (3x^2 + 2x) dx = \frac{1}{4}$$

일 때, $50a$ 의 값을 구하시오. [3점]

063 2016학년도 고3 9월 평가원 A형

--	--	--	--	--

함수 $f(x)$ 가 $f(x) = \int_0^x (2at+1) dt$ 이고

$f'(2) = 17$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [3점]

064 2012년 고3 7월 교육청 나형

--	--	--	--	--

실수 전체에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가

$f(x) = f(x+4)$ 를 만족하고

$$f(x) = \begin{cases} -4x+2 & (0 \leq x < 2) \\ x^2-2x+a & (2 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

일 때, $\int_9^{11} f(x) dx$ 의 값은? [3점]

- ① -8 ② $-\frac{26}{3}$ ③ $-\frac{28}{3}$
④ -10 ⑤ $-\frac{32}{3}$

065 2013학년도 수능 나형

--	--	--	--	--

함수 $f(x) = x+1$ 에 대하여

$$\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx = k \left(\int_{-1}^1 f(x) dx \right)^2$$

일 때, 상수 k 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

087 2016학년도 수능 A형

--	--	--	--	--

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = -f(x), g(-x) = g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x) = f(x)g(x)$ 에 대하여

$$\int_{-3}^3 (x+5)h'(x)dx = 10 \text{ 일 때, } h(3) \text{의 값은? [4점]}$$

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

088 2016년 고3 7월 교육청 나형

--	--	--	--	--

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 가

$$f(x) = \int xg(x)dx, \frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} = 4x^3 + 2x$$

를 만족시킬 때, $g(1)$ 의 값은? [4점]

- ① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

089 2014년 고3 7월 교육청 A형

--	--	--	--	--

양수 a , b 에 대하여 함수 $f(x) = \int_0^x (t-a)(t-b)dt$ 가

다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$ 의 값은? [4점]

(가) 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 극값을 갖는다.

(나) $f(a) - f(b) = \frac{1}{6}$

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

090 2019학년도 사관학교 나형

--	--	--	--	--

삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} \int_{-2}^x f(t)dt = 12$

(나) $\lim_{x \rightarrow \infty} xf\left(\frac{1}{x}\right) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+1)}{x} = 1$

091 2016학년도 수능 A형

--	--	--	--	--

이차함수 $f(x)$ 가 $f(0) = 0$ 이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^2 |f(x)|dx = -\int_0^2 f(x)dx = 4$

(나) $\int_2^3 |f(x)|dx = \int_2^3 f(x)dx$

$f(5)$ 의 값을 구하시오. [4점]

092 2018년 고3 7월 교육청 나형

--	--	--	--	--

함수 $f(x) = (x-1)|x-a|$ 의 극댓값이 1일 때,

$\int_0^4 f(x)dx$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [4점]

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{3}$
④ $\frac{11}{6}$ ⑤ 2

개념 파악하기

(2) 곡선과 x 축 사이의 넓이는 어떻게 구할까?

곡선과 x 축 사이의 넓이

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 구해 보자.

- ① 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 일 때, 정적분과 넓이의 관계에 따라

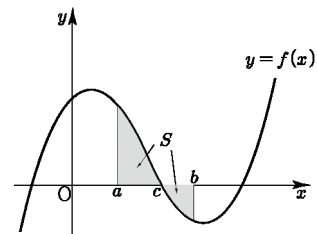
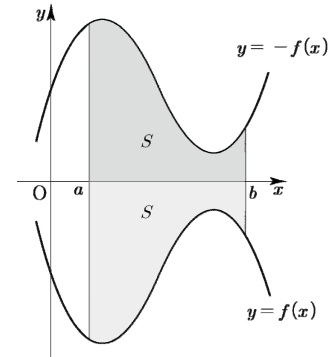
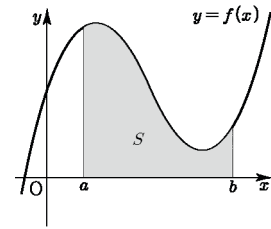
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

- ② 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 일 때, 곡선 $y=f(x)$ 는 곡선 $y=-f(x)$ 와 x 축에 대하여 대칭이고 $-f(x) \geq 0$ 이므로

$$S = \int_a^b \{-f(x)\} dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

- ③ 닫힌구간 $[a, c]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이고, 닫힌구간 $[c, b]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} S &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b \{-f(x)\} dx = \int_a^c |f(x)| dx + \int_c^b |f(x)| dx \\ &= \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$



곡선과 x 축 사이의 넓이 요약

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때,

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 $S = \int_a^b |f(x)| dx$

Tip 1 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 함수 $f(x)$ 가 양의 값과 음의 값을 모두 가질 때는 $f(x)$ 의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 적분 구간을 나누어 계산한다.

Tip 2 $\int_a^b |f(x)| dx$ 는 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 나타내는 **표현형**이다. 즉, 보자마자 x 축으로 둘러싸인 넓이라고 Reading할 수 있어야 한다.

실제 계산할 때는 절댓값을 벗긴 후 계산하고 이때 절댓값을 벗긴 적분형태인

① $\int_a^b f(x) dx$, ② $\int_a^b \{-f(x)\} dx$, ③ $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b \{-f(x)\} dx$ 는

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 나타내는 **계산형**이다.

Tip 3 $\int_a^b |f(x)| dx$ 는 함수 $|f(x)|$ ($y=f(x)$ 에서 x 축 아래에 있는 부분을 x 축 위로 접어올린 형태)를 a 에서 b 까지 적분했다고 볼 수도 있다.

예제 2

곡선 $y = x^2 - 2x$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 0$, $x = 4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

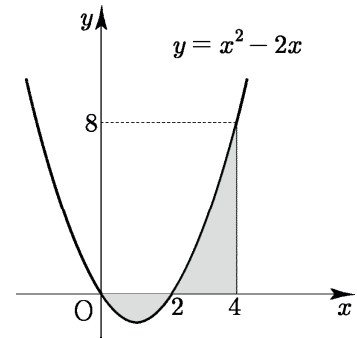
풀이

곡선 $y = x^2 - 2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x = 0$, $x = 2$

닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 $y \leq 0$, 닫힌구간 $[2, 4]$ 에서 $y \geq 0$ 이므로

구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx + \int_2^4 (x^2 - 2x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^4 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = 8 \end{aligned}$$



개념 확인문제 2

다음 곡선과 x 축 및 두 직선 $x = 0$, $x = 2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

(1) $y = -x^2 + 3x - 2$

(2) $y = x^3 - x$

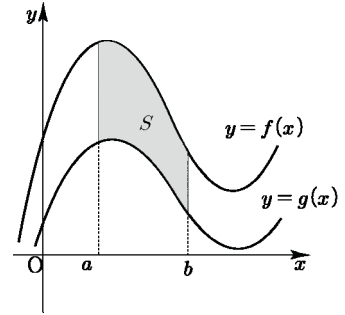
개념 파악하기 (3) 두 곡선 사이의 넓이는 어떻게 구할까?

두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 구해 보자.

① 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \geq g(x) \geq 0$ 일 때,

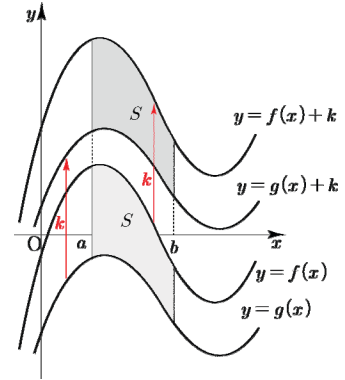
$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$



② 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \geq g(x)$ 이고 $g(x)$ 의 값이 음수인 경우가 있을 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 를 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하여 $f(x)+k \geq g(x)+k \geq 0$ 이 되도록 할 수 있다.

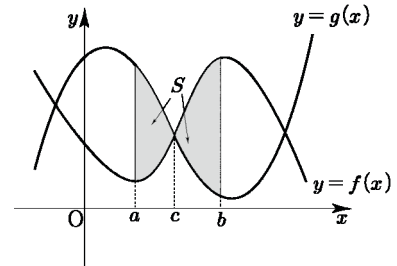
이때 평행이동한 도형의 넓이는 변하지 않으므로

$$S = \int_a^b \{f(x)+k\} dx - \int_a^b \{g(x)+k\} dx = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$



③ 닫힌구간 $[a, c]$ 에서 $f(x) \leq g(x)$ 이고, 닫힌구간 $[c, b]$ 에서 $f(x) \geq g(x)$ 일 때,

$$\begin{aligned} S &= \int_a^c \{g(x) - f(x)\} dx + \int_c^b \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_a^c |f(x) - g(x)| dx + \int_c^b |f(x) - g(x)| dx \\ &= \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \end{aligned}$$



두 곡선 사이의 넓이 요약

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와

두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

Tip 1 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 대소가 바뀔 때는 $f(x) - g(x)$ 의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 구한다.

Tip 2 $\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ 는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로

둘러싸인 도형의 넓이 S 를 나타내는 **표현형**이다. 즉, 보자마자 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 으로 둘러싸인 넓이라고 Reading할 수 있어야 한다.

실제 계산할 때는 절댓값을 벗긴 후 계산하고 이때 절댓값을 벗긴 적분형태인

① $\int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$, ② $\int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$, ③ $\int_a^c \{g(x) - f(x)\} dx + \int_c^b \{f(x) - g(x)\} dx$ 는

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 나타내는 **계산형**이다.

예제 3

두 곡선 $y = x^2 - x$, $y = -x^2 + 3x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

풀이

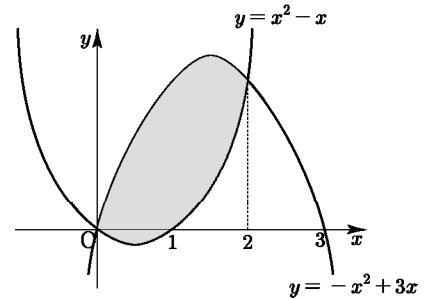
$$x^2 - x = -x^2 + 3x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 2x(x - 2) = 0$$

두 곡선의 교점의 x 좌표는 $x = 0$, $x = 2$

닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 $x^2 - x \leq -x^2 + 3x$ 이므로 구하는 넓이 S 는

$$S = \int_0^2 \{(-x^2 + 3x) - (x^2 - x)\} dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$



Tip 위에 있는 그래프에서 아래에 있는 그래프를 뺀 후 적분한다.

개념 확인문제 3

곡선 $y = -x^2 + 2$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

예제 4

곡선 $y = x^2 + 2x$ 와 세 직선 $y = x$, $x = -1$, $x = 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

풀이

$$x^2 + 2x = x \Rightarrow x^2 + x = x(x + 1) = 0$$

곡선 $y = x^2 + 2x$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는 $x = -1$, $x = 0$

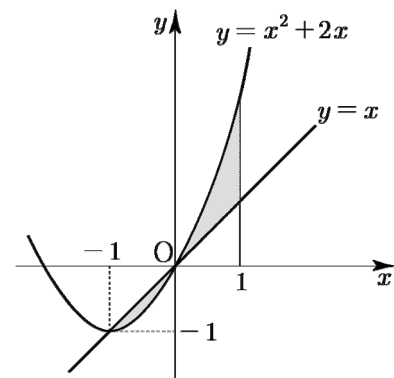
닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 $x^2 + 2x \leq x$, 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서

$x^2 + 2x \geq x$ 이므로 구하는 넓이 S 는

$$S = \int_{-1}^0 \{x - (x^2 + 2x)\} dx + \int_0^1 \{(x^2 + 2x) - x\} dx$$

$$= \int_{-1}^0 (-x^2 - x) dx + \int_0^1 (x^2 + x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$$



개념 확인문제 4

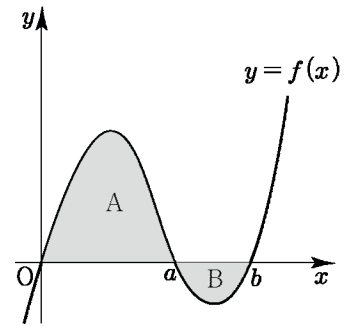
두 곡선 $y = -x^2$, $y = x^2 - 2x$ 와 두 직선 $x = -1$, $x = 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

개념 파악하기

(4) 두 곡선 사이의 넓이를 활용하여 문제를 어떻게 해결할까?

두 곡선 사이의 넓이의 활용

오른쪽 그림에서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하고 x 축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자.



① A의 표현형은 $\int_0^a |f(x)| dx$ 이고 계산형은 $\int_0^a f(x) dx$ 이다.

B의 표현형은 $\int_a^b |f(x)| dx$ 이고 계산형은 $\int_a^b \{-f(x)\} dx$ 이다.

Tip 여기서 $\int_a^b f(x) dx = -B$ 인 것을 쉽게 알 수 있다.

즉, $f(x) \leq 0$ 일 때(x 축 아래에 있을 때) 정적분을 하면 넓이에 마이너스가 붙는다.

② $\int_0^b f(x) dx = A - B$

$$\int_0^b f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_a^b f(x) dx = \int_0^a f(x) dx - \int_a^b \{-f(x)\} dx = A - B$$

Tip 위와 같이 식으로 접근할 수도 있지만 자연스럽게 곡선 $y=f(x)$ 가 $a \leq x \leq b$ 에서 x 축 아래에 있으므로 $\int_a^b f(x) dx = -B$ (넓이에 마이너스)이니 A에서 B를 빼면

$\int_0^b f(x) dx = A - B$ 가 된다. 라는 사고과정으로 접근하는 것을 추천한다.

즉, A에서 B만큼의 넓이가 상쇄된다고 생각하면 된다.

③ A가 B보다 크니 $\int_0^b f(x) dx > 0$ 이다.

Tip 부정적분과 정적분 단원에서 $f(x) = x^3 - x$ 라 할 때, $f(x) = x^3 - x$ 가 기함수이므로 식 계산에 의해 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ 임을 보였다.

이와 달리 위에서 배운 개념을 바탕으로 넓이로 접근해보자.

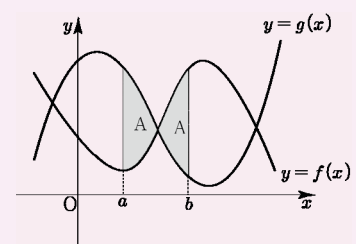
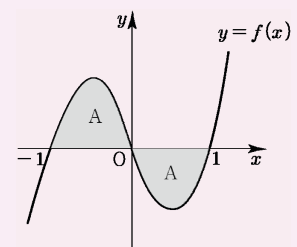
곡선 $y=f(x)$ 는 기함수이므로 $\int_{-1}^0 f(x) dx = A$ 라 하면

$\int_0^1 f(x) dx = -A$ 이므로 $\int_{-1}^1 f(x) dx = A - A = 0$ 이라고

볼 수도 있다. 즉, A에서 A만큼의 넓이가 상쇄되니 0이 된다.

이와 마찬가지로 만약 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 으로 이루어진

두 부분의 넓이가 서로 같을 때, $\int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx = A - A = 0$ 이다.

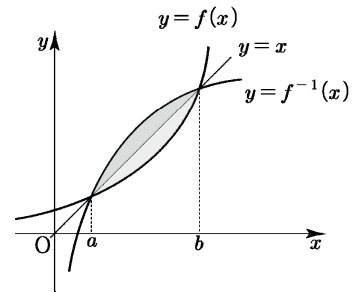


개념 파악하기 (5) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 사이의 넓이는 어떻게 구할까?

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 사이의 넓이

함수 $y=f(x)$ 와 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이 S 는
함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 사이의 넓이의 2배이다. (대칭성 활용)

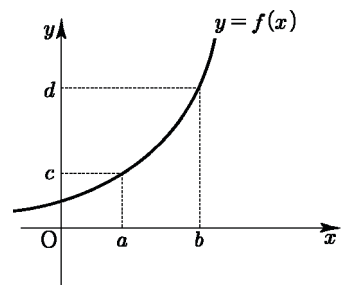
$$S = \int_a^b |f(x) - f^{-1}(x)| dx = 2 \int_a^b |x - f(x)| dx$$



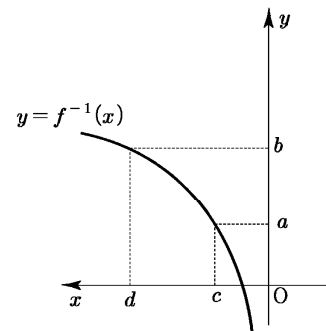
Tip 역함수를 직접 구해서 적분하는 것이 아니라 직선 $y=x$ 와 곡선 $y=f(x)$ 사이의 넓이를 2배하여 계산하는 것이 핵심이다. (by 대칭성)

함수 $y=f(x)$ 의 그래프로 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프 해석하기

오른쪽 그림과 같이 증가함수 $y=f(x)$ 가
 $f(a)=c$, $f(b)=d$ 일 때, a , b 를 역함수로 표현하면?
단순히 x 좌표와 y 좌표를 서로 바꾸어 일차원적으로
 $f^{-1}(c)=a$, $f^{-1}(d)=b$ 라고 할 수도 있다.

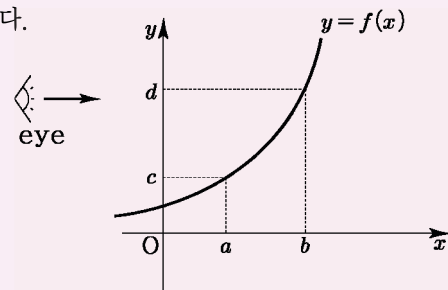


이와 달리 그래프로 접근하는 방법을 알아보자.
 $y=f(x)$ 를 $y=x$ 에 대하여 대칭시키면 $y=f^{-1}(x)$ 가 되는 것을 알고 있다.
즉, x 대신 y 를 넣고 y 대신 x 를 넣어서 역함수를 구할 수 있다.
여기서 아이디어를 얻어 x 축을 y 축으로 보고 y 축을 x 축으로 봐도 된다.
이를 이행하려면 시계반대방향으로 90° 회전을 시켜주기만 하면 된다.
즉, 너무나 자명하게 $y=f^{-1}(x)$ 에 $x=c$, $x=d$ 를 대입하면 함숫값이
 $f^{-1}(c)=a$, $f^{-1}(d)=b$ 가 된다는 것을 바로 알 수 있다.



Tip 1 실제 $y=x$ 에 대하여 대칭시켜서 역함수를 구하면 오른쪽 그림에서
좌우 반전된 그림이 나온다. 90° 로 회전시켰기 때문에 x 축이 오른쪽에서 왼쪽으로
증가하기 때문이다. 정확한 그래프 개형이 중요한 것이 아니라 $y=f^{-1}(x)$ 에 $x=c$, $x=d$ 를
대입하면 함숫값이 $f^{-1}(c)=a$, $f^{-1}(d)=b$ 가 된다는 사실이 중요하다.

Tip 2 실전에서는 아래와 같이 옆에서 바라본다고 생각하면 된다.



개념 파악하기

(6) $f'(x)$ 의 넓이와 $f(x)$ 의 함숫값의 차이는 어떤 관계가 있을까?

$f'(x)$ 의 넓이와 $f(x)$ 의 함숫값의 차이

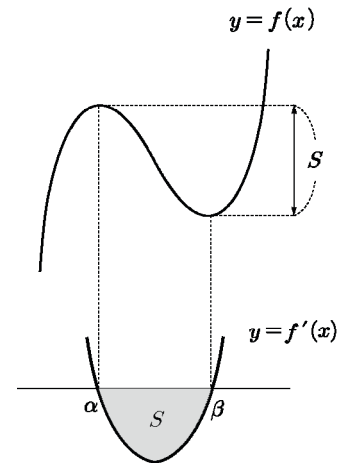
$y = f'(x)$ 와 x 축과 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} |f'(x)| dx = \int_{\alpha}^{\beta} \{-f'(x)\} dx = [-f(x)]_{\alpha}^{\beta} \\ &= -f(\beta) - (-f(\alpha)) = f(\alpha) - f(\beta) \end{aligned}$$

즉, 극값차가 S 이다. $f'(x)$ 의 넓이는 $f(x)$ 의 함숫값의 차이와 같다.

$f'(x) < 0$ 이므로 $f(x)$ 는 열린구간 (α, β) 에서 감소한다.

이때 얼마만큼 감소할까? 넓이 S 만큼 감소한다.



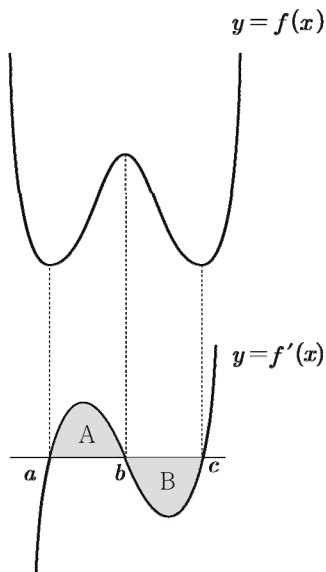
$f'(x)$ 의 넓이 차이로 따른 $f(x)$ 의 그래프 개형

$$A = \int_a^b |f'(x)| dx, \quad B = \int_b^c |f'(x)| dx \text{ 라 하면}$$

A와 B의 대소관계에 따라 $f(x)$ 의 그래프 개형은 달라진다.

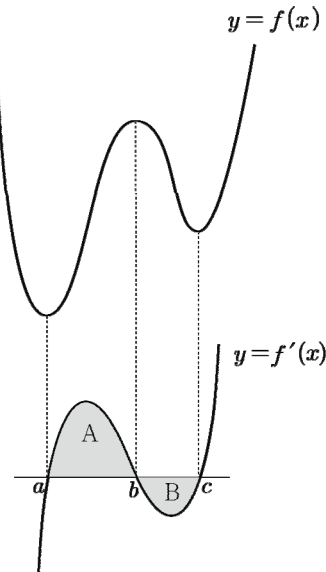
① $A = B$

$$\int_a^c f'(x) dx = f(c) - f(a) = 0 \Rightarrow f(a) = f(c)$$



② $A > B$

$$\int_a^c f'(x) dx = f(c) - f(a) > 0 \Rightarrow f(c) > f(a)$$



예제 7

좌표가 1인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 $t(t \geq 0)$ 에서 속도가 $v(t) = 2 - t$ 일 때, 다음을 구하시오.

- (1) 시간 $t=3$ 에서 점 P의 위치
- (2) 시간 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량
- (3) 시간 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리

풀이

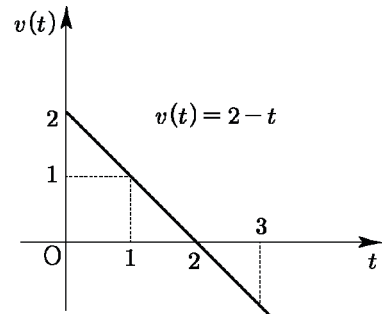
풀이1) $v(t)$ 를 활용하는 방법

$$(1) 1 + \int_0^3 (2-t) dt = 1 + \left[2t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^3 = \frac{5}{2}$$

$$(2) \int_1^3 (2-t) dt = \left[2t - \frac{1}{2}t^2 \right]_1^3 = 0$$

$$(3) \int_1^3 |2-t| dt = \int_1^2 (2-t) dt + \int_2^3 (-2+t) dt$$

$$= \left[2t - \frac{1}{2}t^2 \right]_1^2 + \left[-2t + \frac{1}{2}t^2 \right]_2^3 = 1$$



Tip 무조건 공식을 외우지 말고 $v(t) = 2 - t$ 의 그래프를 그려서 판단하는 편이 좋다. 즉, 이해를 하자! 괜히 적분단원에 있을 리가 없다! 앞에서 배운 것과 완벽하게 똑같다. 얼마만큼 증가하나? 도함수의 넓이만큼 증가한다! 얼마만큼 감소하나? 도함수의 넓이만큼 감소한다!

- (1) 처음 좌표가 1이라고 했다. 0에서 2초까지 위치는 $\int_0^2 v(t) dt$ 만큼 증가하고 2에서 3초까지 위치는

$$\int_2^3 -v(t) dt \text{만큼 감소한다. 즉, } 1 + \int_0^2 v(t) dt - \int_2^3 -v(t) dt = 1 + \int_0^3 v(t) dt \text{와 같다.}$$

- (2) $v(t)$ 그래프를 보면 $\int_1^2 |v(t)| dt = \int_2^3 |v(t)| dt$ 이므로 위치의 증가와 감소량이 서로 같다.

따라서 0이다.

- (3) 움직인 거리이므로 감소량과 증가량을 모두 더해야 하므로 $\int_1^3 |v(t)| dt$ 를 계산하면 된다.

풀이2) $x(t)$ 를 활용하는 방법

공식을 쓰지 않고 적분상수 C 를 찾고 $x(t)$ 를 직접 구해도 된다.

- (1) $v(t)$ 의 부정적분 $x(t) = 2t - \frac{t^2}{2} + C$, $x(0) = 1$

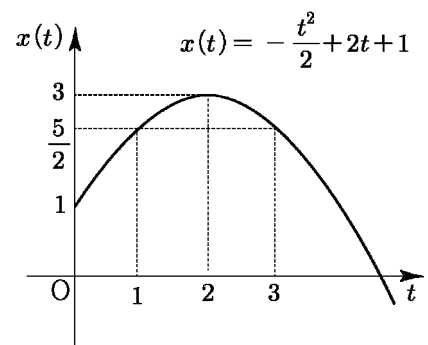
$$\Rightarrow x(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 1 \Rightarrow x(3) = \frac{5}{2}$$

- (2) $x(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 1 \Rightarrow x(1) = x(3) = \frac{5}{2}$ 이므로

$$x(3) - x(1) = 0$$

- (3) $x(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t + 1$ 이므로 $x(2) - x(1) = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$, $x(2) - x(3) = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\text{이동거리는 } \{x(2) - x(1)\} + \{x(2) - x(3)\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ 이다.}$$



1 Theme 곡선과 x 축 사이의 넓이

001

--	--	--	--	--

함수 $y = 12x^3 - 12x^2 - 24x$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

002

--	--	--	--	--

함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 $f'(x) = 3x^2 - 4$ 이고 $f(0) = 0$ 일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

003

--	--	--	--	--

곡선 $y = 8x^3$ 과 x 축 및 두 직선 $x = -1$, $x = a$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 34일 때, 양의 상수 a 의 값을 구하시오.

004

--	--	--	--	--

곡선 $y = n(x-2)^2(x-3)$ 과 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 자연수가 되도록 하는 50이하의 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오.

005

--	--	--	--	--

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f'(0) = f'(4) = 0$
 (나) 곡선 $y = f'(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 6이다.

$f(0) = 10$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오.

006

--	--	--	--	--

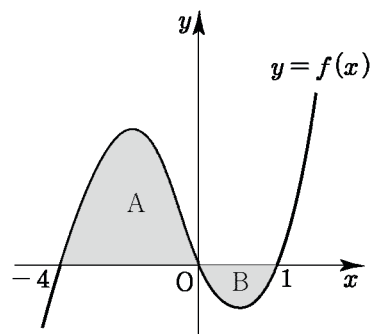
곡선 $y = (x-1)|x-2|$ 과 x 축 및 두 직선 $x = 0$, $x = 3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이는 k 이다. $12k$ 의 값을 구하시오.

007

--	--	--	--	--

아래 그림과 같이 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이를 각각 A, B라 하자.

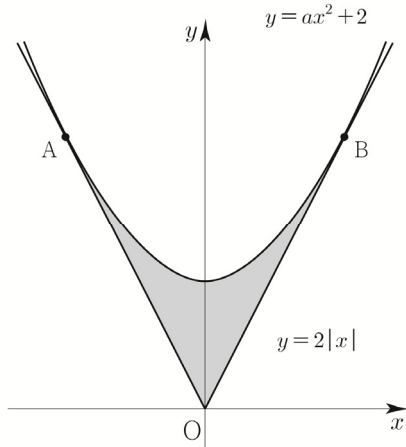
$A = 10$, $B = 2$ 일 때, $\int_{-4}^1 \{2f(x) + |f(x)| - 3\} dx$ 의 값을 구하시오.



035 2020년 고3 10월 교육청 가형

--	--	--	--	--	--

그림과 같이 두 함수 $y = ax^2 + 2$ 와 $y = 2|x|$ 의 그래프가 두 점 A, B에서 각각 접한다. 두 함수 $y = ax^2 + 2$ 와 $y = 2|x|$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a 는 상수이다.) [3점]



- ① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{17}{6}$

036 2021학년도 사관학교 나형

--	--	--	--	--	--

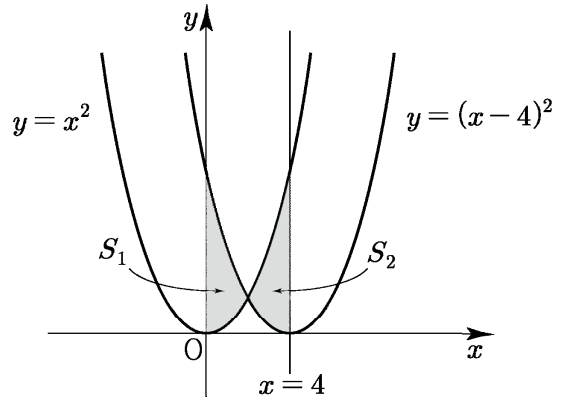
두 곡선 $y = -x^3 + 3x^2 + 4$ 에 접하는 직선 중에서 기울기가 최대인 직선을 l 이라 하자. 직선 l 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

037 2020학년도 사관학교 나형

--	--	--	--	--	--

두 곡선 $y = x^2$, $y = (x-4)^2$ 과 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1 , 두 곡선 $y = x^2$, $y = (x-4)^2$ 과 직선 $x = 4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2 라 할 때, $S_1 + S_2$ 의 값은? [3점]

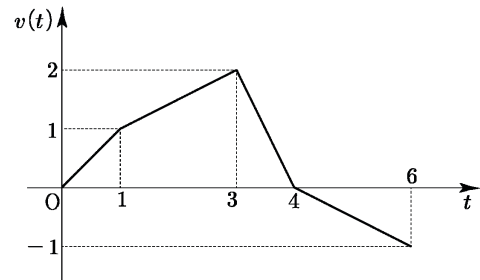


- ① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

038 2014학년도 수능예비시행 A형

--	--	--	--	--	--

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시간 t ($0 \leq t \leq 6$)에서의 속도 $v(t)$ 의 그래프가 그림과 같다. 점 P가 시간 $t = 0$ 에서 시간 $t = 6$ 까지 움직인 거리는? [3점]



- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

039 2018년 고3 10월 교육청 나형

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치 x 가 $x = t^4 + at^3$ (a 는 상수)이다.

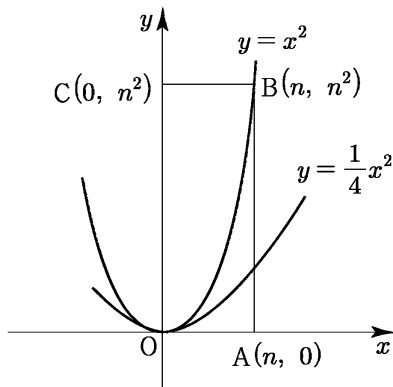
$t=2$ 에서 점 P의 속도가 0일 때, $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

- ① $\frac{16}{3}$ ② $\frac{20}{3}$ ③ 8 ④ $\frac{28}{3}$ ⑤ $\frac{32}{3}$

040 2014학년도 고3 9월 평가원 A형

그림은 두 곡선 $y = x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ 과 꼭짓점의 좌표가

$O(0, 0)$, $A(n, 0)$, $B(n, n^2)$, $C(0, n^2)$ 인 직사각형 OABC를 나타낸 것이다. (단, n 은 자연수이다.)



$n=4$ 일 때, 두 곡선 $y = x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ 과 직선 AB로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

- ① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

041 2021학년도 수능 나형

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가 $v(t) = 2t - 6$ 이다. 점 P가 시각 $t=3$ 에서 $t=k(k > 3)$ 까지 움직인 거리가 25일 때,

상수 k 의 값은? [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

042 2018학년도 수능 나형

곡선 $y = -2x^2 + 3x$ 와 직선 $y = x$ 로 둘러싸인 부분의

넓이가 $\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

043 2021학년도 고3 6월 평가원 나형

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가 $v(t) = -4t + 5$ 이다. 시각 $t=3$ 에서 점 P의 위치가 11일 때, 시각 $t=0$ 에서 점 P의 위치는? [4점]

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

044 2021학년도 고3 9월 평가원 나형

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의

속도 $v(t)$ 가 $v(t) = t^2 - at$ ($a > 0$)이다.

점 P가 시각 $t=0$ 일 때부터 움직이는 방향이 바뀔 때까지 움직인 거리가 $\frac{9}{2}$ 이다. 상수 a 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

로피탈 정리로도 풀어보자.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 11x^2 + ax + b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 22x + a}{1}$$

$$= -19 + a = -9 \Rightarrow a = 10$$

Tip $f(x)$ 가 3차 이상일 때는 로피탈이 압도적으로 간단하다.
물론 미분계수의 정의로도 풀 수 있지만
추후에 미분계수 파트에서 설명하겠다.

066

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1 \Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x+1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + ax^2 + bx + c) = 0$$

$$\Rightarrow -1 + a - b + c = 0$$

$c = 1 - a + b$ 를 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + ax^2 + bx + 1 - a + b}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)\{x^2 + (a-1)x + 1 - a + b\}}{x+1}$$

$$\equiv \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + (a-1)x + 1 - a + b}{1} = 1 - a + 1 + 1 - a + b$$

$$= 3 - 2a + b = 2 \Rightarrow b = 2a - 1$$

$b = 2a - 1$, $c = a$ 이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + (2a-1)x + a$$

$$f(1) = 1 + a + 2a - 1 + a = 4a$$

$$f(1) \leq 12 \text{ 이므로 } 4a \leq 12 \Rightarrow a \leq 3 \text{ 이다.}$$

$$f(2) = 8 + 4a + 4a - 2 + a = 9a + 6 \text{ 이고 } a \leq 3 \text{ 이므로}$$

$$f(2) \text{의 최댓값은 } 33 \text{ 이다.}$$

답 ③

로피탈 정리로도 풀어보자.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + ax^2 + bx + 1 - a + b}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2ax + b}{1} = 3 - 2a + b = 2 \Rightarrow b = 2a - 1$$

Tip 문자가 3개인 방정식은 식이 3개여야 풀 수 있다.
다만 식이 2개면 한 문자로 다른 문자들을 나타낼 수
있다는 사실을 반드시 기억하고 있어야 한다.

ex $-1 + a - b + c = 0$, $b = 2a - 1$

문제에서 주어진 식은 2개이고 문자가 3개
이므로 b 와 c 를 a 로 나타낼 수 있다.

어느 정도 레벨에 도달하면 아래와 같은
사고과정을 느낄 수 있게 된다.

- ① 식이 두 개고 문자가 3개니까
 a 로 나머지 문자들을 표현할 수 있겠군
- ② $f(1) \leq 12$ 로 a 의 범위를 알 수 있겠군
- ③ a 의 범위를 아니까 $f(2)$ 의 최댓값을 구할 수 있겠군.

이는 사실 문제를 만들 때,
출제자가 느끼는 사고과정과 유사하다.

- ① $f(x)$ 를 그냥 주면 너무 쉬우니까
 교과개념을 사용해서 직접 구하게 만들어야겠다.
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$
- ② $f(2)$ 의 최댓값을 구하게 하고 싶군.
 그렇게 하려면 범위가 필요한데?
- ③ $f(1) \leq 12$ 너로 정했다!

067

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)} = \frac{3}{5}$$

만약 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)} = \frac{f(a)}{f(a)} = 1 \text{ 이므로}$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 이다.

$f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고
 $f(a) = 0$ 이므로 $f(x) = (x-a)(x-b)$ 라 둘 수 있다.

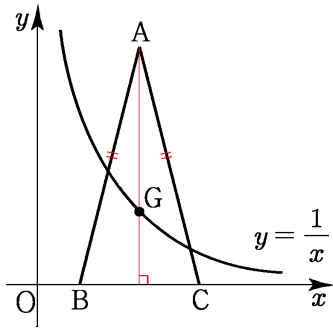
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-b) - (x-a)}{(x-a)(x-b) + (x-a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-b-1}{x-b+1} = \frac{a-b-1}{a-b+1} = \frac{3}{5}$$

$$5(a-b) - 5 = 3(a-b) + 3 \Rightarrow (a-b) = 4$$

072

무게중심 $G\left(t, \frac{1}{t}\right)$ 이므로 $A\left(t, \frac{3}{t}\right)$ 이다.



삼각형 ABC의 넓이 $= 3t$, $\overline{BC} = f(t)$ 이므로

$$3t = \frac{1}{2} \times f(t) \times \frac{3}{t} \Rightarrow f(t) = 2t^2$$

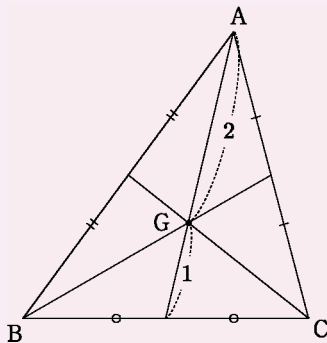
따라서 $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t) - 2t}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t^2 - 2t}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2t}{1} = 2$ 이다.

답 ③

Tip 삼각형의 무게중심은 출제자 입장에서 굉장히 매력적인 소재이다.

<삼각형의 무게중심>

- ① 삼각형의 중선
⇒ 삼각형에서 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 이은 선분
- ② 삼각형의 무게중심
⇒ 삼각형의 세 중선의 교점
- ③ 삼각형의 무게중심의 성질
⇒ 삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 2:1로 나눈다.



- ④ 삼각형의 무게중심과 넓이
⇒ $\triangle ABG = \triangle BCG = \triangle CAG = \frac{1}{3} \triangle ABC$

⑤ $A(a_1, a_2), B(b_1, b_2), C(c_1, c_2)$ 일 때,

삼각형 ABC의 무게중심은

$$G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right) \text{이다.}$$

073

$$-x^2 + 6 = x \Rightarrow x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$A(2, 2), B(2, 0), P(a, a) \Rightarrow Q(2, a)$$

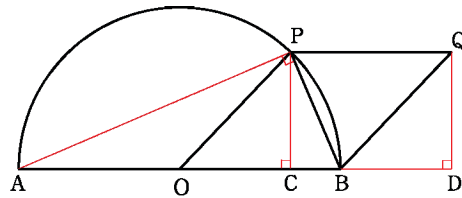
$$\overline{PQ} = 2 - a, \overline{PR} = -a^2 + 6 - a = -(a+3)(a-2)$$

$$\lim_{a \rightarrow 2^-} \frac{\overline{PQ}}{\overline{PR}} = \lim_{a \rightarrow 2^-} \frac{-(a-2)}{-(a+3)(a-2)} = \lim_{a \rightarrow 2^-} \frac{1}{a+3} = \frac{1}{5}$$

답 ②

074

점 P, Q에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하고 보조선을 그어보면 아래 그림과 같다.



직각삼각형 ACP에서

$$\overline{BP} = t, \overline{AB} = 2 \Rightarrow \overline{AP} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BP}^2} = \sqrt{4 - t^2}$$

“삼각형 넓이 같다” technic을 사용하면

$$\triangle ABP \text{의 넓이} = \frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{BP} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CP}$$

$$\Rightarrow t\sqrt{4-t^2} = 2 \times \overline{CP} \Rightarrow \overline{CP} = \frac{t}{2} \sqrt{4-t^2}$$

$$\overline{QD} = \overline{CP} = \frac{t}{2} \sqrt{4-t^2} \text{이므로}$$

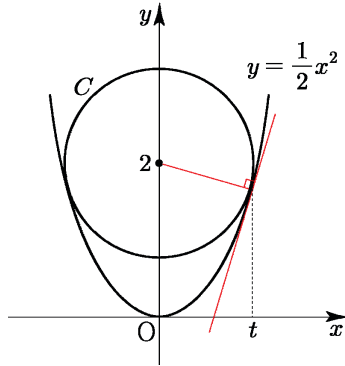
직각삼각형 BDQ에서

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{BQ}^2 - \overline{QD}^2} = \sqrt{1 - \frac{t^2}{4}(4-t^2)}$$

$$= \sqrt{\frac{t^4}{4} - t^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{t^2}{2} - 1\right)^2} = \left|\frac{t^2}{2} - 1\right|$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2} \quad (\because 0 < t < \sqrt{2})$$

$(t, \frac{1}{2}t^2)$ 에서의 접선의 기울기는 서로 수직이다.



$$\frac{\frac{1}{2}t^2 - 2}{t - 0} \times t = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}t^2 = 1 \Rightarrow t = \sqrt{2} \quad (\because t > 0)$$

$$(t, \frac{1}{2}t^2) \Rightarrow (\sqrt{2}, 1)$$

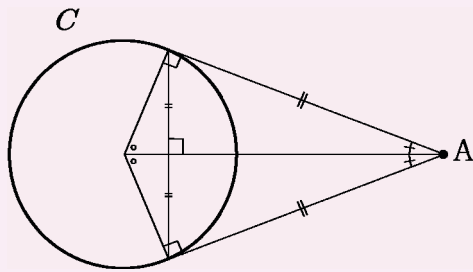
두 점 $(\sqrt{2}, 1)$, $(0, 2)$ 사이의 거리가 원 C 의 반지름 r 이므로 $r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (1-2)^2} = \sqrt{3}$

원 C 의 넓이는 3π 이므로 $a=3$ 이다.

답 3

Tip 원의 중심과 접점을 이은 수직 보조선은 문제를 풀어나가는 key point일 때가 많다. 즉, 반드시 그어야 하는 보조선 중 하나이다.

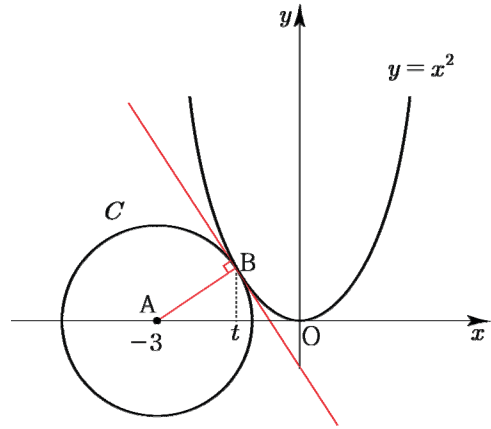
아래 그림과 같이 점 A 에서 원 C 에 접선을 그었을 때, 그어야하는 보조선은 다음과 같다.



자주 출제되는 도형이니 반드시 기억하자.

039

반지름의 길이가 r 이고 중심의 좌표가 $A(-3, 0)$ 인 원 C 와 곡선 $y=x^2$ 가 점 B 에서 접한다. 점 B 의 x 좌표를 t 라 하자.



두 점 $A(-3, 0)$, $B(t, t^2)$ 를 지나는 직선의 기울기와 $B(t, t^2)$ 에서의 접선의 기울기는 서로 수직이다.

$$\frac{t^2}{t+3} \times 2t = -1 \Rightarrow 2t^3 + t + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (t+1)(2t^2 - 2t + 3) = 0 \Rightarrow t = -1$$

$$B(t, t^2) \Rightarrow B(-1, 1)$$

$$r = \overline{AB} = \sqrt{5} \text{ 이고,}$$

$$\text{삼각형 OAB의 넓이 } S = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = \frac{3}{2} \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } r^2 + 20S = 5 + 30 = 35 \text{ 이다.}$$

답 35

040

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \sqrt{5}, \cos(\angle APB) = \frac{3}{5}$$

$$\overline{AB} = x \text{ 라 하자.}$$

삼각형 ABP에서 코사인법칙을 사용하면

$$\cos(\angle APB) = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 - x^2}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{10 - x^2}{10} \Rightarrow 30 = 50 - 5x^2 \Rightarrow x = 2 \quad (\because x > 0)$$

$\overline{AB} = 2$ 이고 삼각형 ABP는 이등변삼각형이므로

$A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ 이다.

$$\overline{OP} = \sqrt{\overline{PB}^2 - \overline{OB}^2} = \sqrt{5 - 1} = 2$$

즉, $P(0, 2)$

직선 BP의 기울기는 -2 이므로

점 C에서의 접선의 기울기는 -2 이다.

$y = f'(x)$ 가 x 축과 접하면
모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이다.

$y = f'(x)$ 가 x 축과 만나지 않으려면
 x 축 위에 있어야 하므로
모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이다.

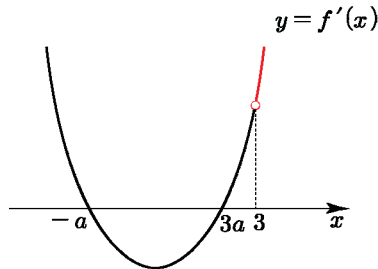
053

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 - 3a^2x$$

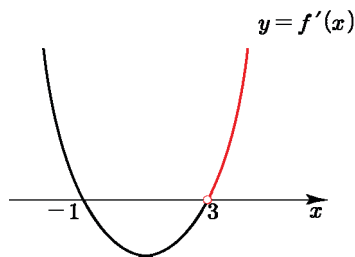
$$f'(x) = x^2 - 2ax - 3a^2 = (x - 3a)(x + a)$$

$3 < x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여
 $f(x_1) < f(x_2)$ 이므로 $x > 3$ 에서 $f(x)$ 가 증가한다.
즉, $x > 3$ 에서 $f'(x) \geq 0$

$a > 0$ 이므로 $f'(x)$ 를 그리면



조건을 만족하려면 $3a < 3$ 이어야 하므로 $a < 1$ 이다.
위와 같은 그림은 직관적으로 당연하게 받아들일 수 있지만
만약 $3a = 3$ 일 때에도 조건을 만족시킬 수 있을까?



$3a = 3 \Rightarrow a = 1$ 이어도 조건을 만족시킨다.

$0 < a \leq 1$ 이므로 a 의 최댓값은 1이다.

답 1

Tip 항상 경계를 조심해야 한다.

a 가 자연수나 정수일 때, a 의 개수나 합을 물어보는
문제에서 특히 조심해야 한다.

위 문제에서는 $a = 1$ 일 때가 경계가 되는데 $a = 1$ 인
상황을 그려보고 특히 유의하면서 판단하면 된다.

054

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2 - 4x + 1$$

$$f'(x) = -x^2 + kx - 4$$

$f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 실수 전체에서 감소함수나
증가함수이어야 한다.

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로 감소함수이어야 한다.

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 를 만족시키면 된다.

판별식을 사용하면

$$D \leq 0 \Rightarrow k^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow (k+4)(k-4) \leq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq k \leq 4$$

따라서 정수 k 의 개수는 9이다.

답 9

Tip 왜 판별식을 쓸까?

<생략된 사고과정>

- ① 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$
- ② y 를 붙여서 함수로 해석하면 $y = f'(x)$ 는 x 축과
접하거나 x 축 위에 있어야 한다.
- ③ 판별식 $D \leq 0$ 이므로 이차방정식 $f'(x) = 0$ 은
중근을 갖거나 서로 다른 두 개의 허근을 갖는다.
즉, $y = f'(x)$ 와 x 축이 접하거나 만나지 않아야 한다.

- ④ $f'(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수 $-\frac{1}{3}$ 이므로

$y = f'(x)$ 가 x 축과 접하면

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이다.

$y = f'(x)$ 가 x 축과 만나지 않으려면

x 축 위에 있어야 하므로

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) < 0$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이다.

$$f'(x) = 2x^3 + 2x - 4 = 2(x^3 + x - 2)$$

$$= 2(x-1)(x^2 + x + 2)$$

모든 실수 t 에 대하여 $t^2 + t + 2 > 0$ 이므로

Semi도함수는 $(x-1)$ 이다.

(실질적으로 부호에 영향을 주는 도함수를 Semi도함수라 하기로 Guide step에서 약속함)

$f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최소이고 최소값은 $f(1) = \frac{3}{2}$

이므로 \overline{AP} 의 최솟값은 $\sqrt{\frac{3}{2}} = m$ 이다.

따라서 $10m^2 = 15$ 이다.

답 15

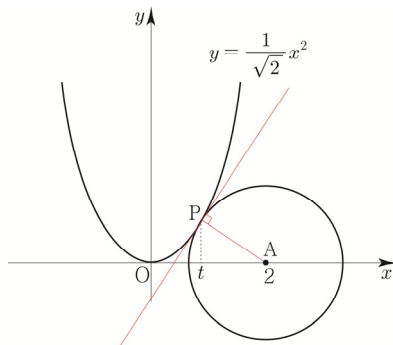
다르게 풀어보자.

한 점에서 거리가 같은 점들의 집합은 원이다.

즉, 점 $A(2, 0)$ 을 중심으로 하는 원의 반지름의

길이를 점점 키웠을 때, 곡선 $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2$ 에

접하는 순간 \overline{AP} 는 최소이다.



P의 x좌표를 t 라 하면 $P\left(t, \frac{1}{\sqrt{2}}t^2\right)$

직선 AP의 기울기는 점 P에서의 접선의 기울기와 수직이므로

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}t^2}{t-2} \times \frac{2}{\sqrt{2}}t = -1 \Rightarrow t^3 + t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)(t^2 + t + 2) = 0 \Rightarrow t = 1$$

따라서 $P\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 일 때,

\overline{AP} 은 최솟값은 $\sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ 이다.

Tip 원은 거리를 나타내는 틀이다.

083

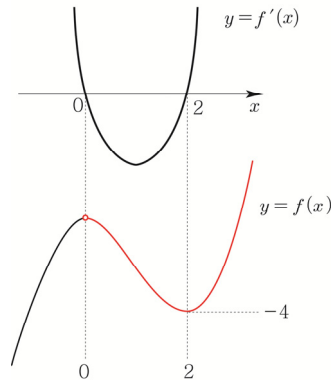
$$y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2 \quad (x > 0)$$

$$y' = x^3 - 3x^2 \quad (x > 0)$$

$f(x) = x^3 - 3x^2 \quad (x > 0)$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$f'(x)$ 를 바탕으로 $f(x)$ 를 그리면



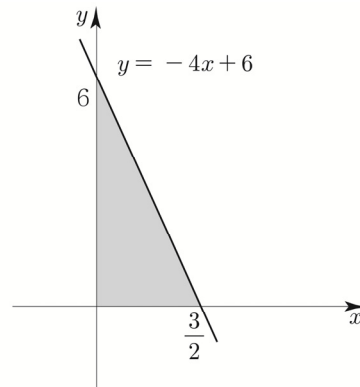
$x > 0$ 에서 $f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = -4$ 이다.

곡선 $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2 \quad (x > 0)$ 위의 점 $(2, -2)$ 에서의

접선의 기울기가 최소이다.

점 $(2, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

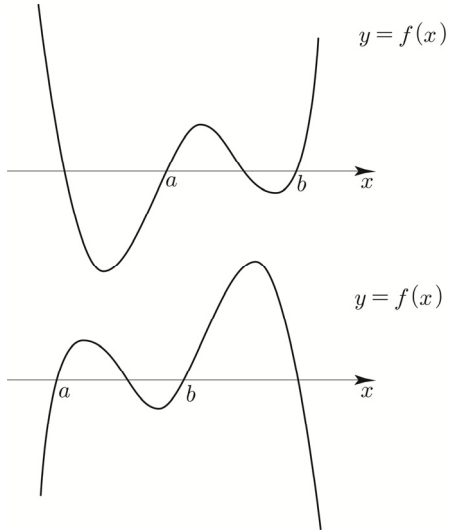
$$y = -4(x-2) - 2 \Rightarrow y = -4x + 6$$



접선 $y = -4x + 6$ 과 x 축, y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이

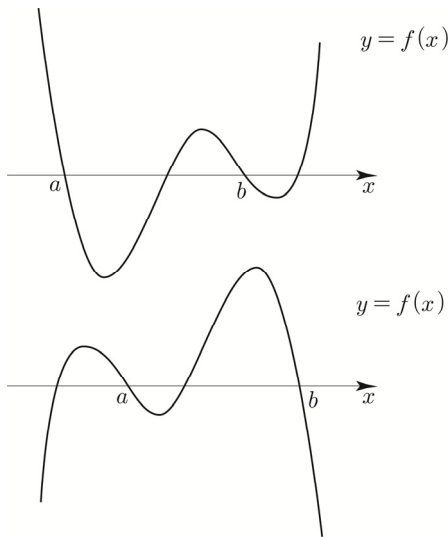
$$k = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \text{ 이므로 } 10k = 45 \text{ 이다.}$$

답 45



$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수일 때와 음수일 때
모두 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

② $f'(a) < 0, f'(b) < 0$

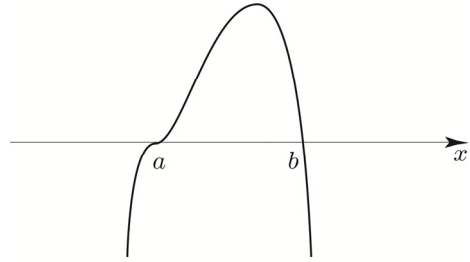


$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수일 때와 음수일 때
모두 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

따라서 ㄴ은 참이다.

ㄴ. 방정식 $f(x)=0$ 이 허근을 갖지 않고 서로 다른
두 실근을 가지면 함수 $f(x)$ 는 극솟값을 가진다.

반례) $f(x) = -(x-a)^3(x-b) \quad (a < b)$



따라서 ㄴ은 거짓이다.

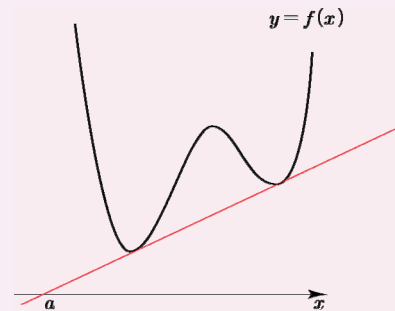
답 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

098

접선의 개수는 접점의 개수와 같으므로
서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있도록 하려면
서로 다른 두 개의 접점이 존재하면 된다.

Tip 접선의 개수 = 접점의 개수?

접선의 개수와 접점의 개수가 반드시 같은 것은 아니다.
예를 들어 $f(x)$ 가 사차함수일 때, 아래와 같은 경우가
가능하다.



즉, 접점이 2개여도 접선이 1개일 수 있다.

하지만 $f(x)$ 가 삼차함수라면 위와 같은 경우가 발생하지
않으므로 접선의 개수와 접점의 개수는 같다.
(이때, 접점의 개수는 접점의 x 좌표의 개수로 판단할 수
있다.)

그렇기 때문에 보통 접선의 개수를 물어보는 문제는
 $f(x)$ 가 삼차함수인 경우가 대부분이다.

접점의 x 좌표를 t 라 하면 접선의 방정식은

$$y = 3t^2(x-t) + t^3 - 4$$

$$v(t) = -t^2 + 6t$$

$$v'(t) = -2t + 6$$

$v'(3) = 0$ 이므로 $t = 3$ 일 때, 점 P의 가속도가 0이다.
 $x(3) = 40 \Rightarrow -9 + 27 + k = 40 \Rightarrow k = 22$

답 22

138

$$f(t) = 2t^2 - 2t, \quad g(t) = t^2 - 8t$$

$$f'(t) = 4t - 2, \quad g'(t) = 2t - 8$$

두 점 P와 Q가 서로 반대방향으로 움직이려면
 $f'(t)$ 와 $g'(t)$ 의 부호가 달라야 하므로
 $f'(t)g'(t) < 0$ 를 만족시키면 된다.

$$(4t - 2)(2t - 8) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < t < 4$$

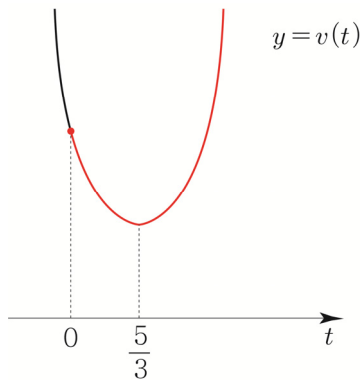
답 ①

139

$$x(t) = t^3 - 5t^2 + at + 5$$

$$v(t) = 3t^2 - 10t + a$$

점 P가 움직이는 방향이 바뀌지 않으려면
 $t \geq 0$ 에서 $v(t)$ 의 부호가 변하지 않아야 한다.
 $v'(t) = 6t - 10$ 이므로 $v(t)$ 는 $t = \frac{5}{3}$ 에서 극소이다.



$t \geq 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 $v(t) \geq 0$ 가 성립하려면
 $v\left(\frac{5}{3}\right) \geq 0 \Rightarrow -\frac{25}{3} + a \geq 0 \Rightarrow a \geq \frac{25}{3}$ 이므로
 조건을 만족시키는 자연수 a 의 최솟값은 9이다.

답 ①

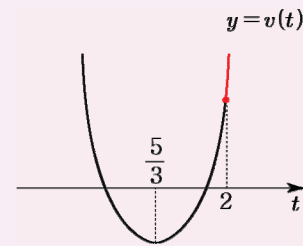
Tip <범위가 있을 때, 판별식 유의사항>

아마 판별식 $D \leq 0$ 이라고 푼 학생이 있을 수 있다.
 이 문제에는 범위가 $t \geq 0$ 이기 때문에
 $t = \frac{5}{3}$ 를 포함하므로 판별식 $D \leq 0$ 을 써도 맞지만
 만약 범위가 $t \geq 2$ 라면 판별식을 쓸 수 없다.

도대체 왜 그럴까?

판별식은 단순 무식해서 정의역이 실수 전체라고
 가정하고 서로 다른 실근의 개수를 알려주기 때문이다.
 즉, 위 문제에서 판별식 $D \leq 0$ 을 써도 괜찮은 이유는
 $t \geq 0$ 인 경우 정의역이 실수전체일 때와 마찬가지로
 t 축과 만나지 않으려면 t 축 위로 뿔 떠나야 하기 때문이다.

예를 들어 범위를 $t \geq 2$ 라 해보자.

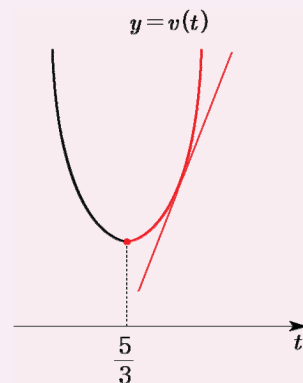


위와 같은 그림일 때, 판별식을 쓰면 방정식 $v(t) = 0$
 이 서로 다른 두 실근을 갖는다고 알려주지만
 실제로는 정의역이 $t \geq 2$ 이므로 실근을 갖지 않는다.

위에서 배운 내용을 적용시켜보자.

만약 $v(t)$ 의 정의역이 $t \geq \frac{5}{3}$ 이고 기울기가 1인

직선 $f(t)$ 와 접한다고 했을 때,
 방정식 $v(t) = f(t) \Rightarrow v(t) - f(t) = 0$ 에서
 판별식을 쓸 수 있을까?



정답은 “쓸 수 있다”이다. $t \geq \frac{5}{3}$ 이지만 정의역이
 실수 전체일 때와 상황이 동일하기 때문이다.

<요약>

1. 범위가 있을 때는 판별식 사용에 각별히 유의해야 하고 함수의 그래프를 그려 접근하도록 하자.
2. 범위가 있어도 정의역이 실수 전체일 때와 상황이 같다면 판별식을 쓸 수 있다.

140

$$f(x) = x^3 - 2 \text{ 라 하면 } f'(x) = 3x^2$$

접점의 좌표를 t 라 하면 접선의 방정식은

$$y = 3t^2(x - t) + t^3 - 2$$

접선이 $(0, -4)$ 를 지나므로

$$-4 = -2t^3 - 2 \Rightarrow 2t^3 = 2 \Rightarrow t = 1$$

$$y = 3(x - 1) - 1 \Rightarrow y = 3x - 4 \text{ 이}$$

$(a, 0)$ 을 지나므로 $a = \frac{4}{3}$ 이다.

답 ②

141

$$x(t) = 2t^3 - kt^2$$

$$v(t) = 6t^2 - 2kt = 2t(3t - k)$$

$$v'(t) = 12t - 2k$$

$$v(1) = 0 \Rightarrow 6 - 2k = 0 \Rightarrow k = 3$$

$$a(3) = v'(3) = 36 - 6 = 30 \text{ 이다.}$$

답 30

142

$$x(t) = t^3 + at^2 + bt$$

$$v(t) = 3t^2 + 2at + b$$

$$v'(t) = 6t + 2a$$

$$v(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0$$

$$v'(2) = 0 \Rightarrow 12 + 2a = 0 \Rightarrow a = -6$$

$a = -6$ 이므로 $b = 9$ 이다. 따라서 $a + b = 3$ 이다.

답 ①

143

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 3ax$$

$$f'(x) = x^2 - 2ax + 3a$$

$f(x)$ 가 역함수가 존재하려면 증가함수여야 하므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

판별식을 쓰면

$$\frac{D}{4} \leq 0 \Rightarrow a^2 - 3a \leq 0 \Rightarrow a(a - 3) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq a \leq 3$$

따라서 상수 a 의 최댓값은 3이다.

답 ①

144

$f(x) = x^3 - ax + b$ 라 하면 $(1, 1)$ 을 지나므로

$$f(1) = 1 \Rightarrow 1 - a + b = 1 \Rightarrow a = b$$

$(1, 1)$ 에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$f'(1) = 2 \Rightarrow 3 - a = 2 \Rightarrow a = 1$$

따라서 $a + b = 2$ 이다.

답 2

145

$$f(x) = -x^3 - x^2 + x$$

$$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1$$

접점의 x 좌표를 t 라 하면 접선의 방정식은

$$y = (-3t^2 - 2t + 1)(x - t) - t^3 - t^2 + t \text{ 이다.}$$

원점을 지나므로 $(0, 0)$ 을 대입하면

$$0 = 3t^3 + 2t^2 - t - t^3 - t^2 + t$$

$$\Rightarrow 0 = 2t^3 + t^2 = t^2(2t + 1)$$

$$\Rightarrow t = 0 \text{ or } t = -\frac{1}{2}$$

$$\textcircled{1} t = 0 \text{ 일 때, } f'(0) = 1$$

$$\textcircled{3} t = -\frac{1}{2} \text{ 일 때, } f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

이므로 구하고자하는 모든 직선의 기울기의 합은 $\frac{9}{4}$ 이다.

답 ②

146

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 15|x - 2a| + 3$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 6x^2 + 15x - 30a + 3 & (x > 2a) \\ x^3 + 6x^2 - 15x + 30a + 3 & (x \leq 2a) \end{cases}$$

$x > 2a$ 에서 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 30a + 3$ 이고,

모든 실수 x 에 대하여

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 15 = 3(x^2 + 4x + 5) > 0 \text{ 이므로}$$

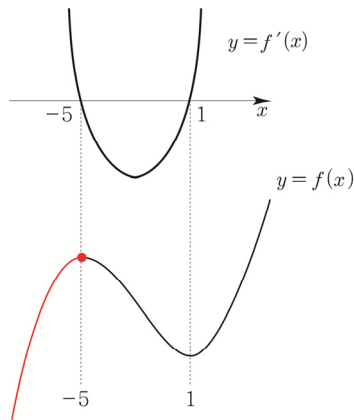
$x > 2a$ 에서 $f(x)$ 는 증가함수이다.

따라서 $x \leq 2a$ 에서 $f(x)$ 가 증가하면 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$x \leq 2a$ 에서 $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 30a + 3$ 이고

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3(x+5)(x-1) \text{ 이므로}$$

$f'(x)$ 를 바탕으로 $f(x)$ 를 그리면



$x \leq 2a$ 에서 $f(x)$ 가 증가하려면

$$2a \leq -5 \Rightarrow a \leq -\frac{5}{2}$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $-\frac{5}{2}$ 이다.

답 ①

Tip $<f(x)$ 는 $x = 2a$ 에서 미분가능해야 할까?>

$x = 2a$ 에서 미분가능해야 $f(x)$ 가 증가하는 것은 아니다.

Guide step에서 배운 내용을 다시 상기시켜보자.

(개념 파악하기 - (4) 함수의 증가와 감소는 어떻게 알 수 있을까?)

함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) < f(x_2)$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 증가한다고 학습하였다.

즉, 미분가능해야 증가하는 것이 아니라 위 조건만 만족시키면 그 구간에서 증가한다고 볼 수 있다.

다만 함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에서 미분가능할 때, 그 구간의 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 그 구간에서 증가한다고 학습하였고

만약 $f(x)$ 가 상수함수가 아닌 다항함수라면 $f(x)$ 가 어떤 열린구간에서 증가하기 위한 필요충분조건은 이 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 라고 학습하였다.

147

$$x(t) = t^3 - 12t + k$$

$$v(t) = 3t^2 - 12 = 3(t+2)(t-2)$$

$v(2) = 0$ 이고 $t = 2$ 에서 $v(t)$ 의 부호가 변하므로

점 P는 $t = 2$ 에서 운동 방향이 바뀐다.

$$x(2) = 8 - 24 + k = 0 \Rightarrow k = 16$$

답 ④

148

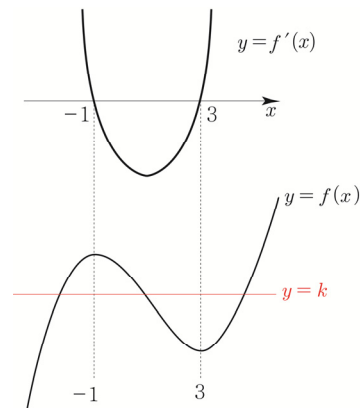
$$x^3 - 3x^2 - 9x - k = 0$$

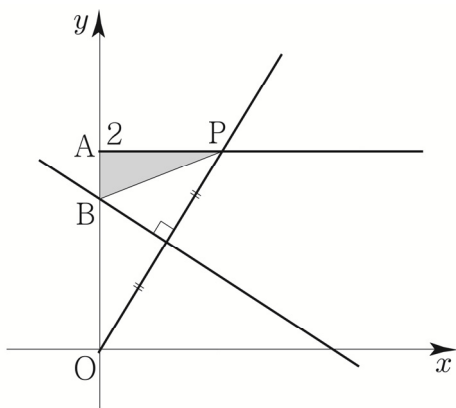
$$x^3 - 3x^2 - 9x = k$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)$ 를 바탕으로 $f(x)$ 를 그리면





직선 OP의 기울기는 $\frac{2}{t}$, 선분 OP의 중점 $\left(\frac{t}{2}, 1\right)$

선분 OP의 수직이등분선은

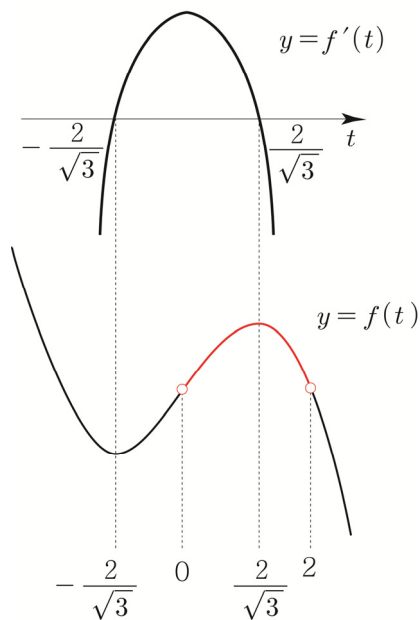
$$y = -\frac{t}{2}\left(x - \frac{t}{2}\right) + 1 \Rightarrow y = -\frac{t}{2}x + \frac{t^2}{4} + 1$$

$B\left(0, \frac{t^2}{4} + 1\right)$ 이므로

$$f(t) = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AP} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{t^2}{4}\right) \times t = \frac{1}{8}(4t - t^3)$$

$$f'(t) = \frac{1}{8}(4 - 3t^2) = -\frac{3}{8}\left(t - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(t + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$f'(t)$ 를 바탕으로 $f(t)$ 를 그리면



$0 < t < 2$ 에서 $f(t)$ 의 최댓값은

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{8}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{b}{a}\sqrt{3}$$

따라서 $a+b=11$ 이다.

답 11

Tip <만약 $t > 2$ 이면 어떻게 될까?>

점 B의 y 좌표는 $\frac{t^2}{4} + 1$ 이므로 $t = 2$ 일 때, 2이고

$t > 2$ 일 때, y 좌표는 2보다 크다.

B의 y 좌표가 A의 y 좌표보다 크기 때문에

$$\overline{AB} = \frac{t^2}{4} - 1 \text{이다.}$$

따라서 만약 $t > 0$ 라고 조건을 변경하면

선분 AB는 길이는 양수이므로 절댓값을 취해서

$$\overline{AB} = \left|1 - \frac{t^2}{4}\right| \text{라고 해야 한다.}$$

길이는 양수이므로 절댓값을 취해줘야 한다.

이를 항상 유의하도록 하자.

160

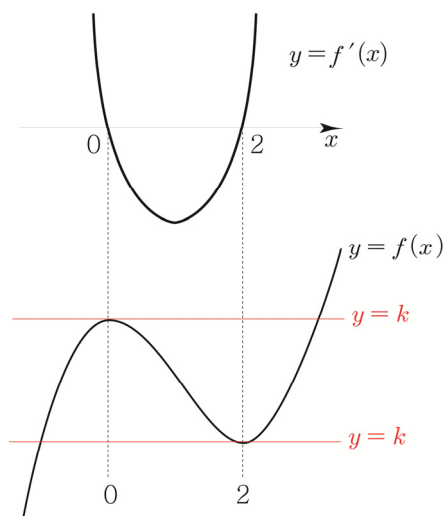
$$x^3 - 3x^2 + 2x - 3 = 2x + k$$

$$x^3 - 3x^2 - 3 = k$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 3 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

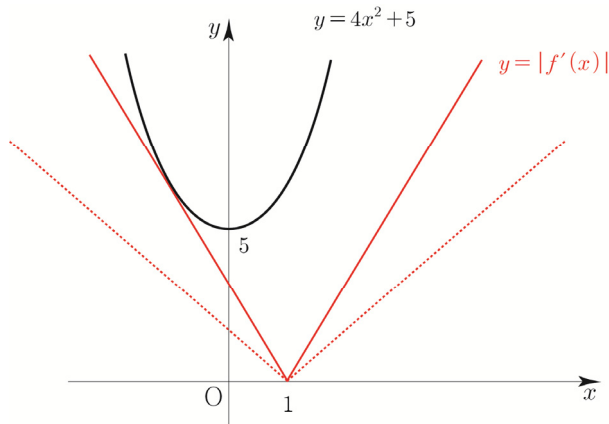
$f'(x)$ 를 바탕으로 $f(x)$ 를 그리면



$$k = f(0) = -3 \text{ or } k = f(2) = -7 \text{ 이므로}$$

조건을 만족시키는 모든 실수 k 의 값의 곱은 21이다.

답 21



a 의 최댓값을 구하는 것이므로 $a > 0$ 일 때라고 가정하고 답을 구해보자.

$y = |2a(x-1)|$ 는 a 에 관계없이 $(1, 0)$ 을 지나고 a 가 커지면 커질수록 기울기가 가팔라진다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $|2a(x-1)| \leq 4x^2 + 5$ 를 만족시키면서 실수 a 가 최대일 때는

$y = -2a(x-1)$ 와 $y = 4x^2 + 5$ 와 접할 때이다.

$g(x) = 4x^2 + 5$ 라 하면

$g'(x) = 8x$

접점의 x 좌표를 t 라 하면

$$g'(t) = -2a \Rightarrow 8t = -2a \Rightarrow t = -\frac{1}{4}a$$

$$g(t) = -2a(t-1) \Rightarrow 4t^2 + 5 = -2a(t-1)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{4} + 5 = -2a\left(-\frac{1}{4}a - 1\right)$$

$$\Rightarrow a^2 + 8a - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (a+10)(a-2) = 0$$

$$\Rightarrow a = 2 \quad (a > 0)$$

답 ②

조건을 만족시키는 실수 a 의 범위를 구해보자.

① $a > 0$ 일 때

$0 < a \leq 2$ 이면 주어진 조건을 만족시킨다.

② $a = 0$ 일 때

$0 \leq 4x^2 + 5$ 이므로 마찬가지로 주어진 조건을 만족시킨다.

③ $a < 0$ 일 때

포인트는 $a < 0$ 일 때인데 $y = |2a(x-1)|$ 이므로

a 의 절댓값만 같으면 $a < 0$ 와 $a > 0$ 는

서로 같은 그래프가 그려진다.

예를 들어

$$a = 1 \Rightarrow y = |2(x-1)|$$

$$a = -1 \Rightarrow y = |-2(x-1)| = |2(x-1)|$$

즉, $a < 0$ 일 때는 $-2 \leq a < 0$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 실수 a 의 범위를 구하면 $-2 \leq a \leq 2$ 이다.

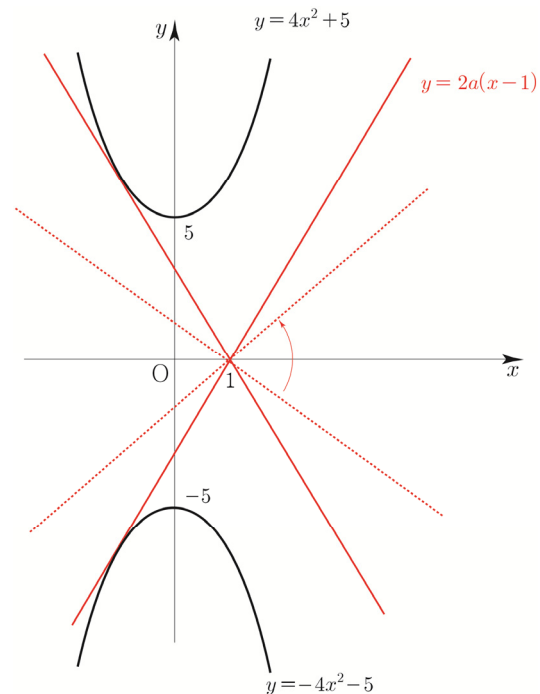
다른 방법으로 구해보자.

$$|f'(x)| \leq 4x^2 + 5 \Rightarrow -4x^2 - 5 \leq f'(x) \leq 4x^2 + 5$$

$$\Rightarrow -4x^2 - 5 \leq 2a(x-1) \leq 4x^2 + 5$$

직선 $y = 2a(x-1)$ 는 a 와 관계없이 항상 지나는 정점이 $(1, 0)$ 이고 기울기가 $2a$ 인 일차함수로 해석할 수 있다.

즉, 점 $(1, 0)$ 을 고정시켜 빙글빙글 돈다고 볼 수 있다.



a 의 최대는 $a > 0$ 일 때, $y = -4x^2 - 5$ 와 접할 때이고

a 의 최소는 $a < 0$ 일 때, $y = 4x^2 + 5$ 와 접할 때이다.

첫 번째 풀이처럼 접점을 이용하여 풀어도 되고

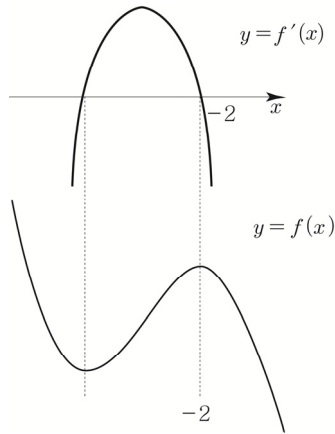
일차함수이니 판별식으로 풀어도 된다.

이번에는 판별식으로 풀어보자.

① $a > 0$ 일 때

$$2a(x-1) = -4x^2 - 5$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 2ax - 2a + 5 = 0$$



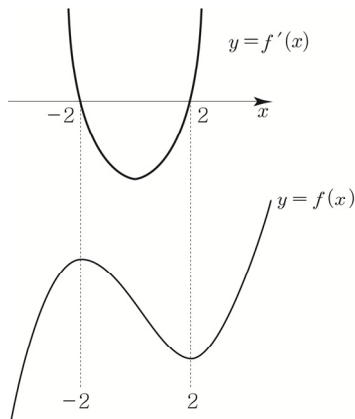
(나) $f'(-3)=f'(3)$

$f'(x)$ 는 이차함수이므로 대칭성에 의해서

$f'(x)$ 의 대칭축은 $x=0$ 이다.

이를 만족시키려면 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이어야 한다.

$f'(x)$ 의 대칭축이 $x=0$ 이므로 $f'(2)=0$ 이다.



ㄱ. 도함수 $f'(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값을 갖는다.

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로

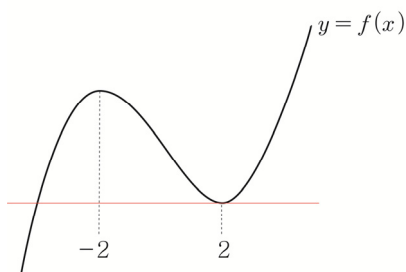
$f'(x)$ 의 최고차항의 계수도 양수이다.

$f'(x)$ 의 대칭축이 $x=0$ 이므로

$f'(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값을 갖는다.

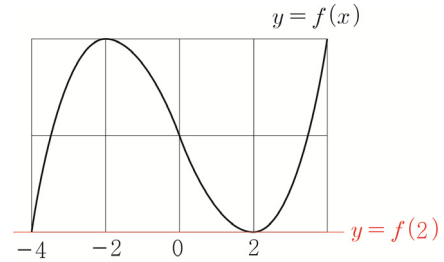
따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$ 는 서로 다른 두 실근을 갖는다.



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=f(2)$ 가 서로 다른 두 점에서 만나므로 ㄴ은 참이다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$ 에서의 접선은 점 $(2, f(2))$ 를 지난다.



$f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a 라 하면

$$f(x)-f(2)=a(x-2)^2(x+4) \text{ (식 세우기 technique)}$$

$$f(x)=a(x^3-12x+16)+f(2)$$

점 $(-1, f(-1))$ 에서의 접선의 방정식을

$$y=mx+n \text{이라 하자.}$$

$$f(x)=mx+n \Rightarrow f(x)-mx-n=0$$

즉, 방정식 $f(x)-mx-n=0$ 은

$x=-1$ 에서 중근을 갖는다.

$$f(x)-mx-n=0$$

$$f(x)=a(x^3-12x+16)+f(2) \text{이므로}$$

$$a(x^3-12x+16)+f(2)-mx-n=0$$

다른 하나의 실근을 b 라 하고

근과 계수의 관계 technique을 사용하면

$$-1-1+b=0 \Rightarrow b=2$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$ 에서의 접선은 점 $(2, f(2))$ 를 지나므로 ㄷ은 참이다.

답 ⑤

Tip <삼차방정식의 근과 계수의 관계 응용>

도함수의 활용 Training 1step 015번 문제 해설에서 배운 내용을 다시 복습해보자.

방정식 $f(x)=f(2)$ 과 방정식 $f(x)=mx+n$ 의

실근의 합은 같다. 우변을 좌변으로 넘겼을 때,

x^2 의 계수에 영향을 주지 못하기 때문이다.

이를 이용하면 식 세우기 technique을 사용하지 않아도 된다.

방정식 $f(x)=f(2)$ 의 실근의 합이 $2+2-4=0$ 이므로

$f(x)=mx+n$ 의 실근의 합은 $-1-1+b=0$ 이다.

따라서 $b=2$ 이다.

빠른 정답

189	31	205	32
190	108	206	⑤
191	④	207	243
192	④	208	⑤
193	①	209	105
194	10	210	39
195	⑤	211	42
196	③	212	③
197	④	213	51
198	160	214	④
199	④	215	36
200	①	216	38
201	⑤	217	147
202	②	218	5
203	④	219	35
204	④	220	14

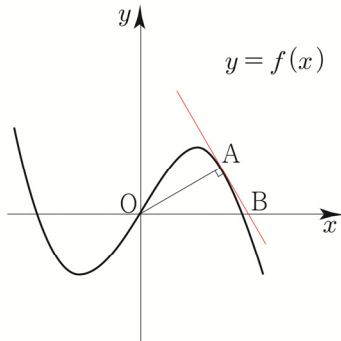
해설

189

$$f(x) = -\sqrt{3}x^3 + \sqrt{3}x$$

$$f'(x) = -3\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3} = -3\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(a, f(a))$ 에서의 접선을 l
원점 O 와 직선 l 사이의 거리가 직선 OA 의 길이와 같으려면
직선 OA 의 기울기와 직선 l 의 기울기가 수직이어야 한다.



$$\frac{f(a)}{a} \times f'(a) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{-\sqrt{3}a^3 + \sqrt{3}a}{a} \times (-3\sqrt{3}a^2 + \sqrt{3}) = -1$$

$$\Rightarrow 3(a^2 - 1)(3a^2 - 1) = -1 \Rightarrow 9a^4 - 12a^2 + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (3a^2 - 2)^2 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ or } a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$f(x)$ 는 기함수이므로 원점에 대하여 대칭되어 있다.

$a = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 일 때와 $a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 일 때 삼각형 OAB 의
넓이는 서로 같다.

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{라 하면}$$

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$y = -\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow y = -\sqrt{3}x + \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

접선 l 의 x 절편은 $\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ 이므로 $B\left(\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}, 0\right)$

삼각형 OAB 의 넓이는

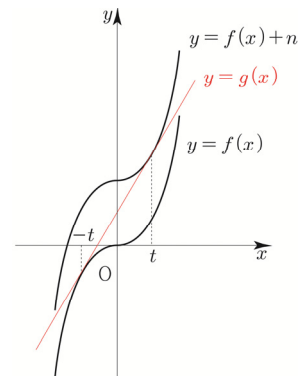
$$\frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{9\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{27} = \frac{q}{p}\sqrt{3} \text{이므로}$$

$p+q=31$ 이다.

답 31

190

함수 $f(x) = x^3$ 와 자연수 n 에 대하여 두 함수
 $y=f(x)$, $y=f(x)+n$ 의 그래프와 모두 접하는
직선 $y=g(x)$



곡선 $y=f(x)+n$ 과 직선 $y=g(x)$ 가 접하는
접점의 x 좌표를 t 라 하면
접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$ 이다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 접하는
접점의 x 좌표를 T 라 하면
접선의 기울기는 $f'(T)=3T^2$ 이다.

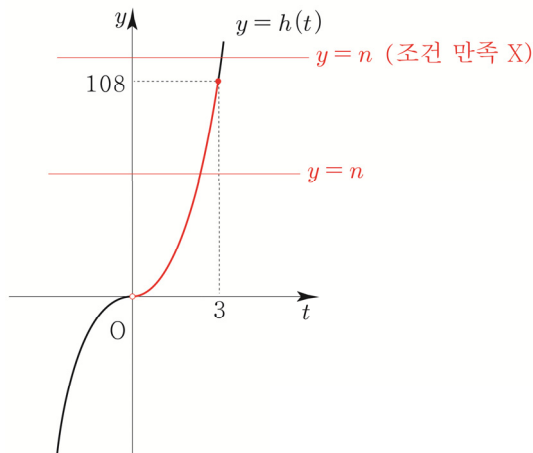
두 접선이 동일하므로 접선의 기울기가 서로 같다.
 $f'(t)=f'(T) \Rightarrow 3t^2=3T^2 \Rightarrow T=-t \ (T \neq t)$

함수 $y=f(x)+n$ 위의 점 (t, t^3+n) 에서의
접선의 방정식은
 $y=3t^2(x-t)+t^3+n \Rightarrow y=3t^2x-2t^3+n$
함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(-t, -t^3)$ 에서의
접선의 방정식은
 $y=3t^2(x+t)-t^3 \Rightarrow y=3t^2x+2t^3$

두 접선이 동일하므로 접선의 y 절편이 서로 같다.
 $-2t^3+n=2t^3 \Rightarrow 4t^3=n$

모든 실수 x 에 대하여 $g'(x) \leq 27$ 이 되려면
 $g'(x)=3t^2$ 이므로
 $3t^2 \leq 27 \Rightarrow t^2 \leq 9 \Rightarrow (t-3)(t+3) \leq 0$
 $\Rightarrow 0 < t \leq 3 \ (\because t > 0)$
이면 된다.
즉, t 에 대한 방정식 $4t^3=n$ 에서 실근 t 가
 $0 < t \leq 3$ 이 되도록 하는 자연수 n 의 개수를 구하면 된다.

$h(t)=4t^3$ 라 하고 $y=h(t)$ 를 그리면



만약 $n > 108$ 이라면 $4t^3=n$ 의 실근 t 가 $t > 3$ 이므로
 $0 < t \leq 3$ 를 만족시키지 않는다.

조건을 만족시키는 n 의 범위는 $1 \leq n \leq 108$ 이므로
모든 자연수 n 의 개수는 108이다.

답 108

191

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$
모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 이다.

$f(x)$ 는 기함수이고 원점에 대하여 대칭이므로

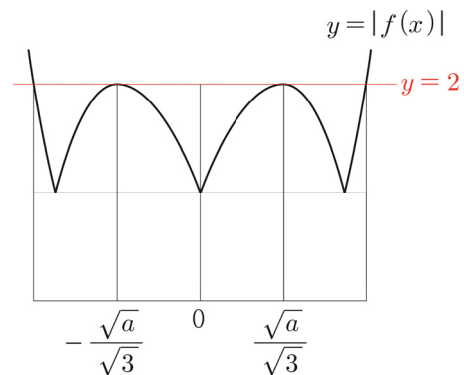
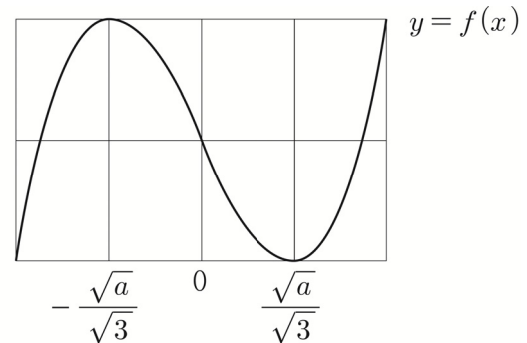
$$f(x)=x^3-ax$$

$$f'(x)=3x^2-a=3\left(x^2-\frac{a}{3}\right)=3\left(x-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}\right)$$

(Guide step에서 x^3+ax 보다 x^3-ax 를 추천한 이유에
대하여 학습하였다.)

방정식 $|f(x)|=2$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4이려면
삼차함수 $f(x)$ 는 극값이 존재하는 ①번 개형이어야 한다.

이를 바탕으로 box를 그리면



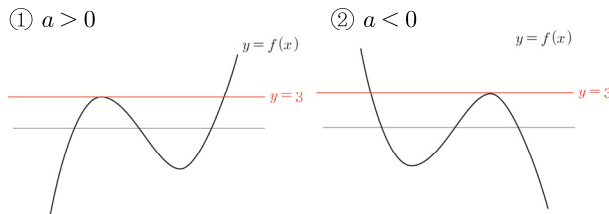
곡선 $y=|f(x)|$ 와 직선 $y=2$ 가 서로 다른 네 점에서
만나려면 극댓값이 2이면 된다.

방정식 $g(f(x))=m$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$f(x)$ 는 삼차함수이므로 실수 전체의 집합을 치역으로 갖기 때문에 $g(f(x))$ 의 최솟값은 $g(x)$ 의 최솟값과 같다.
 $g(x) = x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$ 는 $x=3$ 에서 최솟값 1을 가지므로 $g(f(x))$ 는 $f(x)=3$ 에서 최솟값 $m=1$ 을 가진다.

즉, 방정식 $g(f(x))=1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로 방정식 $f(x)=3$ 을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

따라서 직선 $y=3$ 과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(다) 방정식 $g(f(x))=17$ 의 서로 다른 세 실근을 찾는다.

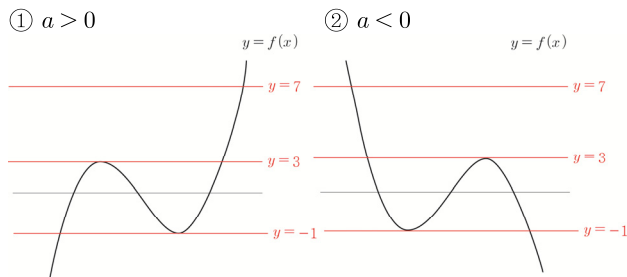
$$g(x) = 17 \Rightarrow x^2 - 6x + 10 = 17 \Rightarrow (x-7)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ or } x = 7$$

이므로 $f(x) = -1$ or $f(x) = 7$ 이다.

(다) 조건에서 방정식 $g(f(x))=17$ 의 서로 다른 세 실근을 갖고 위의 그래프에서 방정식 $f(x)=7$ 의 실근의 개수를 조사하면 1이므로 $f(x) = -1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

즉, 세 직선 $y = -1, y = 3, y = 7$ 과 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



따라서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 3이고 극솟값은 -1이므로 극댓값과 극솟값의 합은 $3+(-1)=2$ 이다.

답①

194

두 삼차함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x)g(x) = (x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$$

$g(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이고,

$g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극댓값을 가진다.

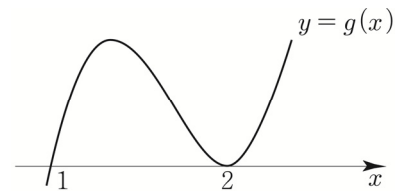
$g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로 $g'(2)=0$

$g(x) = 3(x-a)(x-b)^2$ 꼴이어야 하므로

$g'(2)=0$ 를 만족시키려면 $g(x)$ 는 $(x-2)^2$ 을 인수로 가져야한다.

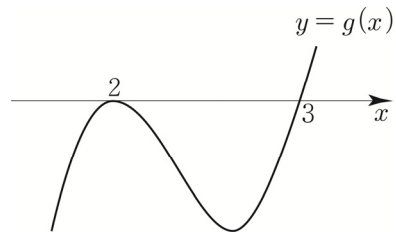
즉, $g(x) = 3(x-1)(x-2)^2$ or $g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$

$$\textcircled{1} g(x) = 3(x-1)(x-2)^2$$



$g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 갖지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\textcircled{2} g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$$



$g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로 조건을 만족시킨다.

$$\text{즉, } f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2(x-3)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)(x-3) + \frac{1}{3}(x-1)^2$$

$$f'(0) = \frac{7}{3} = \frac{q}{p} \text{ 이므로 } p+q=10 \text{ 이다.}$$

답 10

Tip <숨겨진 조건 해석>

“ $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극댓값을 가진다.”로 알려주고자 하는 조건은 다음과 같다.

$$\textcircled{1} g'(2)=0 \quad \textcircled{2} x=2 \text{에서 극댓값}$$

즉, 두 조건 모두 사용되어야 한다.

출제자 입장에서 $g'(2) = 0$ 만 알려주고자 했다면
극댓값보다는 극값을 갖는다고 했을 것이다.

이렇게 평가원은 한 조건($x=2$ 에서 극댓값)에
다른 조건($g'(2) = 0$)을 숨겨서 제시하는 것을 좋아한다.

ex 함수 $g(x) = \int_0^x tf(t)dt$ 라는 조건은

$$\textcircled{1} g(0) = 0 \quad \textcircled{2} g'(x) = xf(x)$$

위 두 조건 말고도 $\textcircled{3} g'(0) = 0$ 이라는
숨겨진 조건도 내포하고 있다.

즉, 모든 조건은 이유가 있으니 조건을 꼼꼼히 해석하자.

195

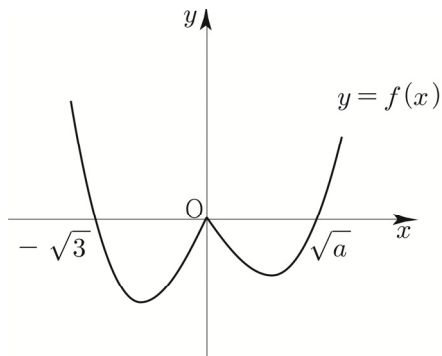
$$f(x) = \begin{cases} a(3x - x^3) & (x < 0) \\ x^3 - ax & (x \geq 0) \end{cases}$$

a 를 모르기 때문에 $f(x)$ 를 그리기 곤란하므로
 a 의 범위에 따라 case분류하면

① $a > 0$

$$f(x) = \begin{cases} -ax(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) & (x < 0) \\ x(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로 $f(x)$ 를 그리면

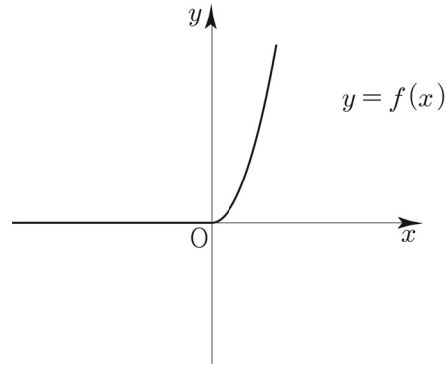


$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 0을 가지므로
조건을 만족시키지 않는다.

② $a = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x^3 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로 $f(x)$ 를 그리면



$x=0$ 에서 극솟값 0을 갖고, $x=b(b < 0)$ 에서
극값(극댓값, 극솟값 모두 가능) 0을 가지므로
조건을 만족시키지 않는다.

(위 설명이 이해가 되지 않았다면 Guide step

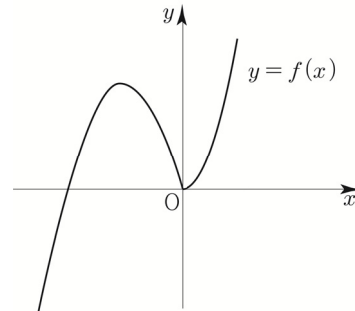
개념파악하기 -(6) 함수의 극대와 극소란 무엇일까?
파트를 다시 복습하길 권한다.)

③ $a < 0$

$$f(x) = \begin{cases} -ax(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) & (x < 0) \\ x^3 - ax & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$y = x^3 - ax$$

$y' = 3x^2 - a > 0$ ($\because a < 0$)이므로 $f(x)$ 를 그리면



$x < 0$ 에서

$$f'(x) = a(3 - 3x^2) = -3a(x+1)(x-1)$$

$$f'(-1) = 0 \text{이므로}$$

$f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값 5를 가진다.

$$f(-1) = 5 \Rightarrow a(-3+1) = 5 \Rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2}(3x - x^3) & (x < 0) \\ x^3 + \frac{5}{2}x & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로 $f(2) = 8 + 5 = 13$ 이다.

답 ⑤

196

자연수 n

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$

(가) $f(n) = 0$

$f(x)$ 는 $(x-n)$ 을 인수로 가져야한다.

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $(x+n)f(x) \geq 0$ 이다.

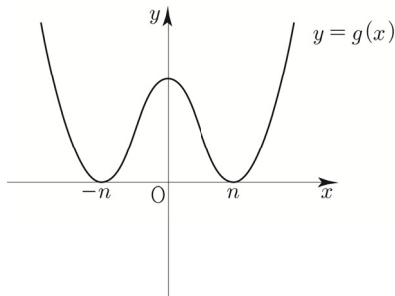
$$(x+n)f(x) = (x+n)(x-n)(x^2+ax+b)$$

$$g(x) = (x+n)(x-n)(x^2+ax+b) \text{라 하면}$$

$g(x)$ 는 사차함수이고 $g(-n) = g(n) = 0$ 이므로

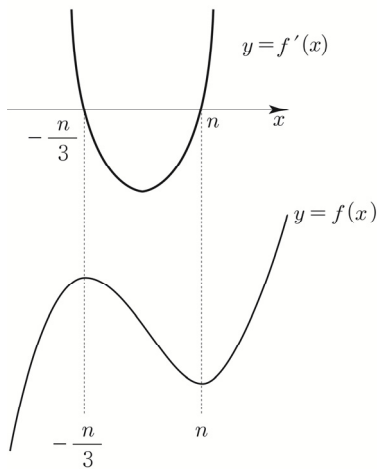
모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq 0$ 가 되려면

$$g(x) = (x+n)^2(x-n)^2 \text{이어야 한다.}$$



$$f(x) = (x+n)(x-n)^2$$

$$f'(x) = (x-n)^2 + 2(x+n)(x-n) = 3(x-n)\left(x + \frac{n}{3}\right)$$



$f(x)$ 는 $x = -\frac{n}{3}$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f\left(-\frac{n}{3}\right) = \frac{2}{3}n \times \frac{16}{9}n^2 = \frac{32}{27}n^3 = a_n$$

따라서 a_n 이 자연수가 되도록 하는 n 의 최솟값은 3이다.

답 ③

197

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = (3t^2 + 2at + b)(x - t) + t^3 + at^2 + bt$$

접선이 y 축과 만나는 점을 P

$$P(0, -2t^3 - at^2) \text{이므로}$$

$$g(t) = \sqrt{(-2t^3 - at^2)^2} = |-2t^3 - at^2| = |2t^3 + at^2|$$

(가) $f(1) = 2$

$$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b = 2 \Rightarrow a + b = 1$$

(나) 함수 $g(t)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

Tip <함수 $|h(x)|$ 의 미분가능성>

Q. 미분가능한 함수 $h(x)$ 에 대하여 함수 $|h(x)|$ 가

$x = k$ 에서 미분이 가능한지 불가능하지 않은지

확인하려면 어떻게 해야 할까?

$h(k)$ 의 함숫값에 따라 크게 2가지 case가 존재한다.

① $h(k) \neq 0$

$h(k) \neq 0$ 인 경우에는 미분 가능한 함수를 x 축 아래 부분을 접어 올리지만 하는 것이므로 실수 전체에서 미분 가능하면 $h'(k)$ 도 당연히 존재한다.

② $h(k) = 0$

문제는 ② case인데 $h(k) = 0$ 일 때에는 case분류를 해줘야 한다.

i) $x = k$ 를 경계로 부호가 바뀔 때는 총 4가지의 개형이 가능하다.



첫 번째와 두 번째 개형은 $h'(k) \neq 0$ 이므로

접어 올렸을 때 좌미분계수와 우미분계수가 같아질

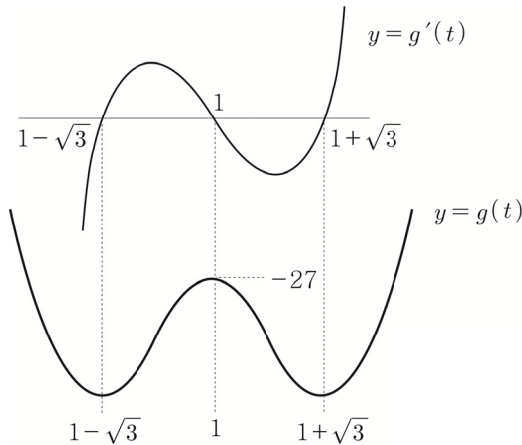
수 없다. ($h'(k) = -h'(k) \Rightarrow h'(k) = 0$ 모순!)

결국 미분가능하려면 세 번째와 네 번째 개형과 같이 $h'(k) = 0$ 이어야 한다.

즉, $x = k$ 에서 뚫는 접선이 나와야 한다.

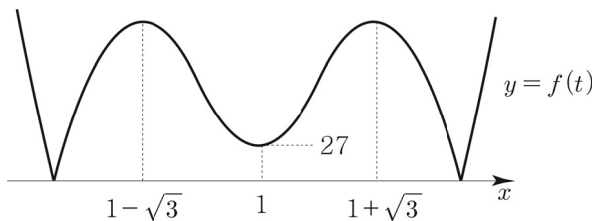
$$\begin{aligned}
 g'(t) &= 4t^3 - 12t^2 + 8 = 4(t^3 - 3t^2 + 2) \\
 &= 4(t-1)(t^2 - 2t - 2) \\
 &= 4(t-1)(t-(1-\sqrt{3}))(t-(1+\sqrt{3})) \\
 g(1) &= 1 - 4 + 8 - 32 = -27
 \end{aligned}$$

$g'(t)$ 를 바탕으로 $g(t)$ 를 그리면



($y = g'(t)$ 의 그래프가 $(1, 0)$ 에 대하여 점대칭이므로 $y = g(t)$ 는 $t = 1$ 에 대하여 대칭이다. 이는 Guide Step 개념파악하기 - (14) 사차함수의 그래프는 어떠한 특징을 가지고 있을까? 에서 학습하였다.)

$g(t)$ 의 그래프를 바탕으로 $f(t) = |g(t)|$ 를 그리면



$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \leq 0$$

case분류하면

$$\textcircled{1} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} = 0$$

위 조건은 우미분계수와 좌미분계수가 둘 중에 하나만 0이면 되지만 함수 $f(t)$ 는 우미분계수와 좌미분계수 모두 0으로 같은 경우만 가능하다.
(두 개의 점점빼고 다른 점에서는 미분가능하므로)

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = 1 - \sqrt{3} \text{ or } t = 1 \text{ or } t = 1 + \sqrt{3}$$

$$\textcircled{2} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} < 0$$

우미분계수와 좌미분계수의 부호가 서로 달라야 한다.
(미분가능하지 않은 점부터 조사하면 된다.)

방정식 $f(t) = 0$ 의 근 중 서로 다른 두 실근의 합은
함수 $y = f(t)$ 의 그래프의 특징으로 빠르게 찾을 수 있다.
 $y = f(t)$ 는 $t = 1$ 에 대칭되어 있으므로 두 실근의 합은
 $1 \times 2 = 2$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 실수 t 의 값의 합은
 $1 - \sqrt{3} + 1 + 1 + \sqrt{3} + 2 = 5$ 이다.

답 ④

Tip <좌미분계수 \times 우미분계수>

$$\text{Q1. } \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0$$

이때 $x = a$ 에서 미분이 가능할까?

답은 “아니다”이다.

예를 들어 우미분계수가 0이고 좌미분계수가 1이면
조건을 만족시키지만 $x = a$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\text{Q2. } \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0$$

의 조건은 $x = t$ 에서 미분가능하지 않다는 조건과
완벽히 동일할까?

답은 “아니다”이다. 좌미분계수와 우미분계수가
같을 수 없으므로 $x = a$ 에서 미분가능하지 않은 것은
맞지만 반드시 부호가 달라야 한다.

예를 들어 우미분계수가 1이고 좌미분계수가 2이면
 $x = a$ 에서 미분가능하지 않지만
위 조건을 만족시키지 않는다.

즉, “미분가능하지 않다”는 조건보다 더 tight한 조건이다.

$$\text{Q3. } \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0$$

이때 $x = a$ 에서 미분이 가능할까?

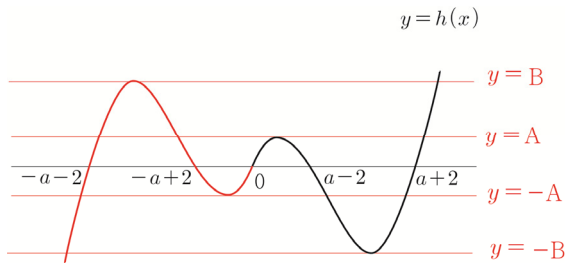
답은 “아니다”이다.

예를 들어 우미분계수가 2이고 좌미분계수가 3이면
위 조건을 만족시키지만 $x = a$ 에서 미분가능하지
않을 수 있다.

함수 $g(t)$ 가 $t=\alpha$ 에서 불연속인 α 의 개수는 4이므로 (나) 조건을 만족시키지 않는다.

③-ii) $x > 0$ 에서 극댓값 $< |$ 극솟값 $|$ 일 때

$x > 0$ 에서 $h(x)$ 의 극댓값을 B, 극솟값을 $-A$ 라 하면

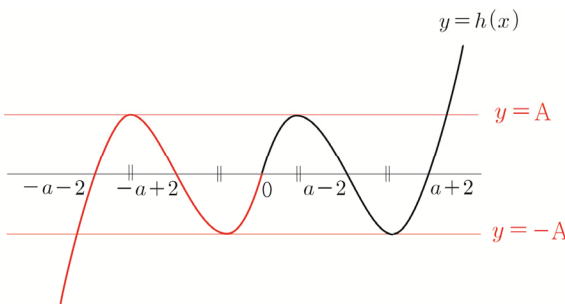


함수 $g(t)$ 는 $t = -B, t = -A, t = A, t = B$ 에서 불연속이다.

함수 $g(t)$ 가 $t=\alpha$ 에서 불연속인 α 의 개수는 4이므로 (나) 조건을 만족시키지 않는다.

③-iii) $x > 0$ 에서 극댓값 $= |$ 극솟값 $|$ 일 때

$x > 0$ 에서 $h(x)$ 의 극댓값을 A, 극솟값을 $-A$ 라 하면



극댓값 $= |$ 극솟값 $|$ 이라면 두 점 $(0, 0), (a+2, 0)$ 의 중점이 $(a-2, 0)$ 이어야 하므로

$$\frac{(a+2)+0}{2} = a-2 \Rightarrow a=6$$

$$f(x) = \begin{cases} x(x+6)^2 & (x < 0) \\ x(x-6)^2 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} (x+6)^2 + 2x(x+6) & (x < 0) \\ (x-6)^2 + 2x(x-6) & (x \geq 0) \end{cases} \quad \text{이므로}$$

$f'(0) = 36$ 이다.

답 36

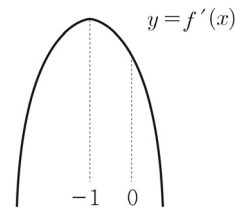
Tip 1 대칭성은 출제자 입장에서 정말 매력적인 소재 중 하나이다. 이 문제의 경우에도 출제자는 문제를 설계하기 전부터 ‘원점 대칭을 이용한 문제를 내야겠다.’는 밑그림을 그린 후 문제를 제작했을 가능성이 높다.

Tip 2 전형적인 case분류, 대칭성, New 함수 technic이 모두 적용된 종합세트 같은 문제이다. 처음부터 잘하는 사람은 없다. 아무것도 아니게 느껴질 때까지 주기적으로 반복하여 확실히 체화하도록 하자.

216

$h(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이고 $x=0$ 에서 미분가능하다.
 $\Rightarrow f(0)=g(0), f'(0)=g'(0)$

이차함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대이므로 $f'(0) < 0$ 이다. $f'(0)=g'(0) \Rightarrow g'(0) < 0$



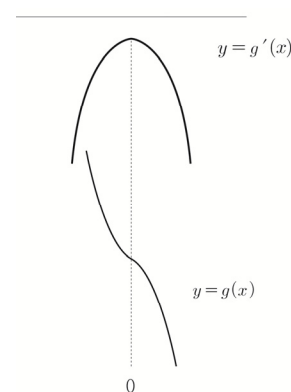
삼차함수 $g(x)$ 는 이차항의 계수가 0이므로 $g(x) = ax^3 + bx + c$ 라 하면

$$g'(x) = 3ax^2 + b$$

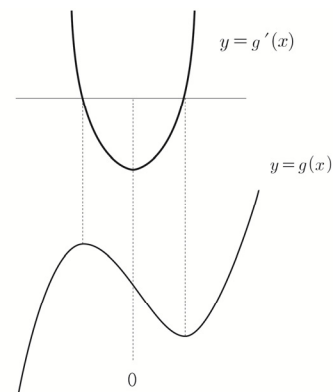
$$g'(0) < 0 \Rightarrow b < 0$$

a 의 부호에 따라 case분류하면(함수 $g'(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭인 것이 핵심이다.)

① $a < 0$



② $a > 0$



(나) 점 (2, 0)에서 곡선 $y=f(x)$ 에 그은 접선의 개수는 2이다.

$f(x)$ 는 삼차함수이므로 접점의 개수와 접선의 개수는 같다.

$$f(x) = x^2(x+c) = x^3 + cx^2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2cx$$

접점의 x 좌표를 t 라 하면 접선의 방정식은

$$y = (3t^2 + 2ct)(x-t) + t^3 + ct^2$$

접선이 (2, 0)을 지나므로

$$0 = (3t^2 + 2ct)(2-t) + t^3 + ct^2$$

$$\Rightarrow 2t^3 + (c-6)t^2 - 4ct = 0$$

$$\Rightarrow t\{2t^2 + (c-6)t - 4c\} = 0$$

방정식 $t\{2t^2 + (c-6)t - 4c\} = 0$ 이 서로 다른 두 개의 실근을 가져야하므로 두 가지 case가 존재한다.

① 방정식 $2t^2 + (c-6)t - 4c = 0$ 이 0이 아닌 중근을 갖는 경우

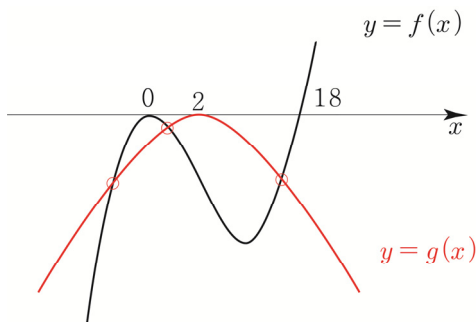
판별식을 사용하면

$$D = (c-6)^2 + 32c = 0 \Rightarrow c^2 + 20c + 36 = 0$$

$$\Rightarrow (c+18)(c+2) = 0 \Rightarrow c = -18 \text{ or } c = -2$$

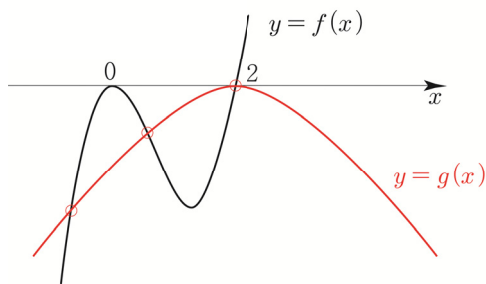
①- i) $c = -18$

$$f(x) = x^2(x-18)$$



①- ii) $c = -2$

$$f(x) = x^2(x-2)$$

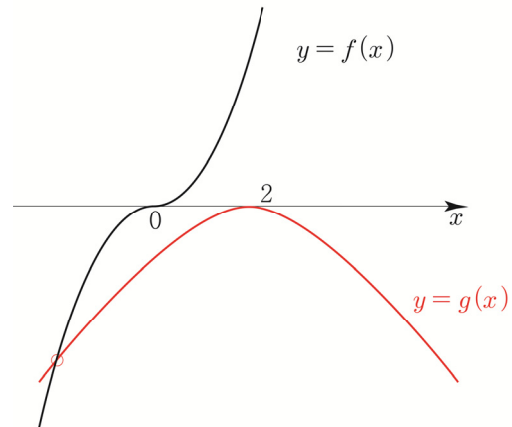


(다) 방정식 $f(x) = g(x)$ 는 오직 하나의 실근을 가진다.

①- i), ①- ii)의 경우 $y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나므로 (다)조건을 만족시키지 않는다.

② 방정식 $2t^2 + (c-6)t - 4c = 0$ 이 0과 0이 아닌 하나의 실근을 갖는 경우

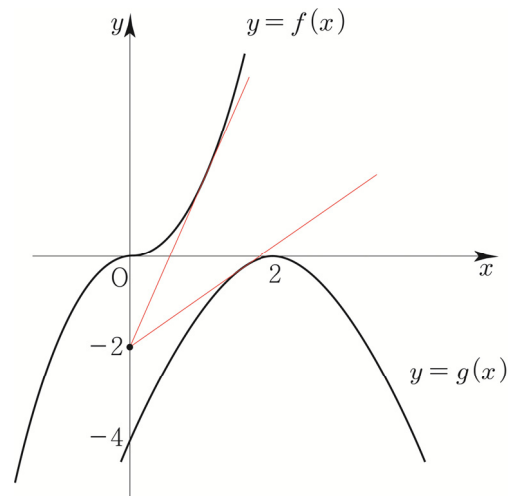
방정식에 $t=0$ 을 대입하면 $c=0$ 이므로 $f(x) = x^3$



$y=f(x)$ 의 그래프와 $y=g(x)$ 의 그래프가 한 점에서 만나므로 (다) 조건을 만족시킨다.

$x > 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \leq kx - 2 \leq f(x)$

직선 $y=kx-2$ 는 k 와 관계없이 항상 지나는 점이 $(0, -2)$ 이다. 즉, k 를 “정점 $(0, -2)$ 을 지나는 직선의 기울기”로 해석할 수 있다. (정점 technic !)



따라서 직선 $y=kx-2$ 가 $y=f(x)$ 의 그래프에 접할 때 k 의 값이 최대이고, $y=g(x)$ 의 그래프에 접할 때 k 의 값이 최소이다.

❶ 직선 $y = kx - 2$ 가 $y = f(x)$ 의 그래프에 접할 때, 접점의 x 좌표를 p 라 하면

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(p) = k \Rightarrow 3p^2 = k$$

$$f(p) = kp - 2 \Rightarrow p^3 = kp - 2$$

위 두식을 연립하면

$$p^3 = 3p^3 - 2 \Rightarrow p = 1$$

$$k = 3 \text{이므로 } \alpha = 3$$

❷ 직선 $y = kx - 2$ 가 $y = g(x)$ 의 그래프에 접할 때, 접점의 x 좌표를 q 라 하면

$$g(x) = -(x-2)^2$$

$$g'(x) = -2(x-2)$$

$$g'(q) = k \Rightarrow -2q + 4 = k$$

$$g(q) = kq - 2 \Rightarrow -(q-2)^2 = kq - 2$$

위 두식을 연립하면

$$-q^2 + 4q - 4 = -2q^2 + 4q - 2$$

$$\Rightarrow q^2 = 2 \Rightarrow q = \sqrt{2} \quad (\because q > 0)$$

$$k = -2\sqrt{2} + 4 \text{이므로 } \beta = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$\alpha - \beta = 3 - (4 - 2\sqrt{2}) = -1 + 2\sqrt{2} = a + b\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$a^2 + b^2 = 5 \text{이다.}$$

답 5

답나왔지만 여기서 한 가지 의문점이 든다.

과연 ①- i) $c = -18$ ($f(x) = x^2(x-18)$) 일 때, 점 $(2, 0)$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 그은 접선의 개수는 2일까?

한번 확인해 보자.

$$t\{2t^2 + (c-6)t - 4c\} = 0 \text{에 } c = -18 \text{을 대입하면}$$

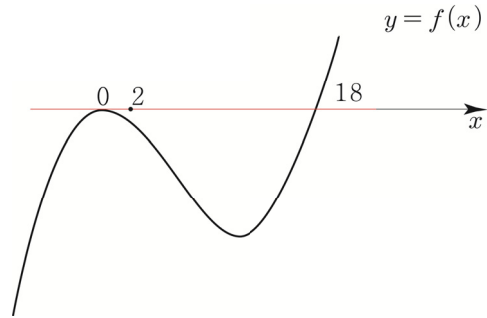
$$t(2t^2 - 24t + 72) = 0 \Rightarrow t(t-6)^2 = 0 \text{이므로}$$

접점의 x 좌표는 $t = 0$ or $t = 6$ 이다.

$t = 0$ 일 때,

$$y = (3t^2 - 36t)(x-t) + t^3 - 18t^2 \Rightarrow y = 0 \text{이므로}$$

다음 그림과 같이 $y = 0$ 이 접선이 된다.



$t = 6$ 일 때,

$$y = (3t^2 - 36t)(x-t) + t^3 - 18t^2 \Rightarrow y = -108x + 216$$

$$f(x) = x^3 - 18x^2$$

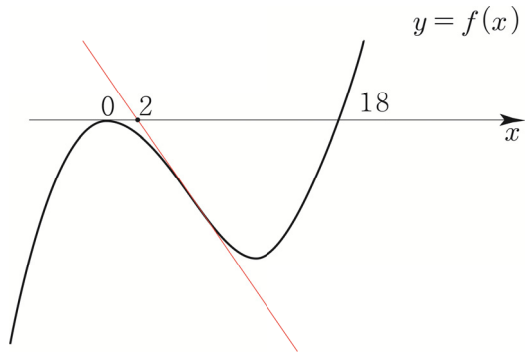
$$f'(x) = 3x^2 - 36x$$

$$f''(x) = 6x - 36$$

$$f''(6) = 0$$

$f(x)$ 의 변곡점은 $(6, f(6))$ 이므로 접점이 변곡점이고

다음 그림과 같이 $y = -108x + 216$ 은 변곡점선이 된다.



따라서 점 $(2, 0)$ 에서 곡선 $y = x^3(x-18)$ 에 그은 접선의 개수는 2이다.

219

$t > 0$, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$

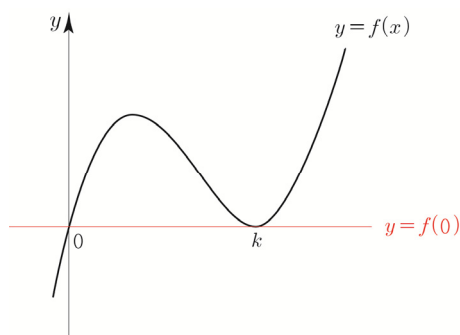
$$g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{f(t) - f(0)}{t-0} \text{이므로}$$

$g(t)$ 는 두 점 $(0, f(0))$, $(t, f(t))$ 의 기울기로 해석할 수 있다.

Guide step에서 배웠듯이 삼차함수의 개형은 3가지인데

(가)조건을 만족시키려면 극댓값과 극솟값을 갖는 ①번 개형이어야 한다.

또한 (가) 조건에 의해서 함수 $f(x)$ 의 그래프는 점 $(k, f(k))$ 에서 직선 $y = f(0)$ 과 접한다.



$$f(x) - f(0) = x(x-k)^2$$

$$f'(x) = (x-k)^2 + 2x(x-k) = (3x-k)(x-k)$$

$$g(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{t(t-k)^2}{t} = (t-k)^2$$

(나) 조건에 의해서

$$f'(a) = g(a) \Rightarrow (3a-k)(a-k) = (a-k)^2$$

$$\Rightarrow 2a(a-k) = 0 \Rightarrow a = k \left(\because a > \frac{5}{3} \right)$$

$$g(a) = 0 \text{ 이고 } f'\left(\frac{k}{3}\right) = f'(k) = 0 \text{ 이므로}$$

(나) 조건에 의해서

$$f'\left(\frac{5}{3}\right) = f'(a) = 0 \Rightarrow \frac{k}{3} = \frac{5}{3} \Rightarrow k = 5$$

$$A_m = \{x \mid f'(x) = g(m), 0 < x \leq m\}$$

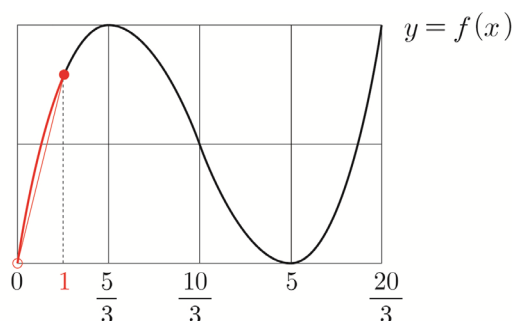
m 에 값을 넣어보면서 파악해보자.

$m = 1$ 이면

$$A_1 = \{x \mid f'(x) = g(1), 0 < x \leq 1\}$$

box를 그려서 파악해보자.

(box를 그리면 삼각함수의 비율관계를 손쉽게 알 수 있어 $x=1$ 의 위치를 대략적으로 알 수 있다.)



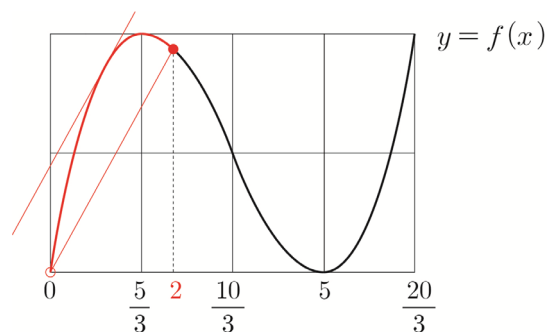
$0 < x \leq 1$ 에서 방정식 $f'(x) = g(1)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이므로 $n(A_1) = 1$ 이다.

(여기서 $f(1)$ 과 $f\left(\frac{10}{3}\right)$ 의 대소관계는 중요한 사항이 아니다.

즉, 정확하게 점 $(1, f(1))$ 의 위치를 찾지 않아도 된다.)

$m = 2$ 이면

$$A_2 = \{x \mid f'(x) = g(2), 0 < x \leq 2\}$$



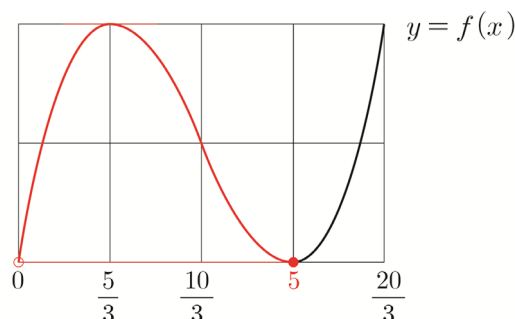
$0 < x \leq 2$ 에서 방정식 $f'(x) = g(2)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 $n(A_2) = 1$ 이다.

$m = 3, m = 4$ 일 때도 마찬가지로

$n(A_3) = n(A_4) = 1$ 이다.

$m = 5$ 이면

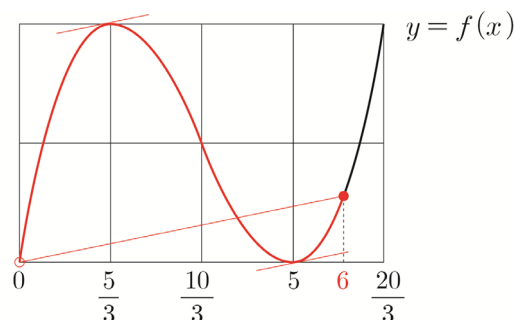
$$A_5 = \{x \mid f'(x) = g(5), 0 < x \leq 5\}$$



$0 < x \leq 5$ 에서 방정식 $f'(x) = g(5)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이므로 $n(A_5) = 2$ 이다.

$m = 6$ 이면

$$A_6 = \{x \mid f'(x) = g(6), 0 < x \leq 6\}$$



$0 < x \leq 6$ 에서 방정식 $f'(x) = g(6)$ 의 서로 다른 실근의

개수는 2이므로 $n(A_6)=2$ 이다.

$m > 6$ 이면 그래프를 그렸을 때, $m=6$ 과 마찬가지로
방정식 $f'(x)=g(m)$ 을 만족시키는

$x < \frac{5}{3}$ or $5 < x < m$ 인 서로 다른 두 실근이 존재한다.

(by 평균값 정리)

여기서 조심해야 할 것은 x 의 범위인데
 $0 < x \leq m$ 이므로 실근이 0 이하가 되면 집합에 포함되지
않는다.

즉, 경계(실근이 $x=0$)일 때의 상황을 조사해봐야 한다.

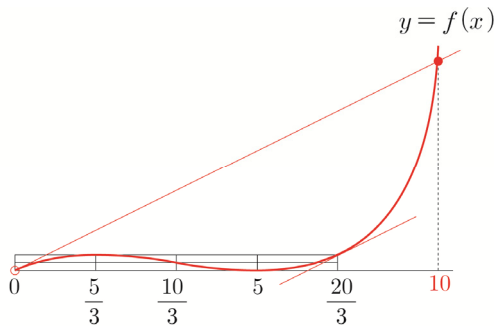
$f'(0)=g(m)$ 임을 만족시키는 m 을 구해보자.

$$f'(x)=(3x-5)(x-5), \quad g(t)=(t-5)^2$$

$$f'(0)=g(m) \Rightarrow 25=(m-5)^2 \Rightarrow m=10 \quad (\because m > 0)$$

$m=10$ 이면

$$A_{10} = \{x \mid f'(x)=g(10), 0 < x \leq 10\}$$



$x=0$ 일 때 $f'(0)=g(10)$ 이지만 $0 < x \leq 10$ 의 범위에
포함되지 않는다.

$0 < x \leq 10$ 에서 방정식 $f'(x)=g(10)$ 의 서로 다른 실근의
개수는 1이므로 $n(A_{10})=1$ 이다.

$g(m)$ 의 값이 커질수록 (직선의 기울기가 커질수록)

$x < \frac{5}{3}$ 에서 $f'(x)=g(m)$ 을 만족시키는 x 의 값은 작아진다.

$$\left(\because x_1 < x_2 < \frac{5}{3} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \right)$$

즉, $m > 10$ 이면 $x < \frac{5}{3}$ 에서 $f'(x)=g(m)$ 을

만족시키는 x 의 값은 0보다 작아지므로 $n(A_m)=1$ 이다.

($5 < m < 10$ 이면 $x < \frac{5}{3}$ 에서 $f'(x)=g(m)$ 을

만족시키는 x 의 값은 0보다 커지므로 $n(A_m)=2$)

따라서 $n(A_m)=2$ 를 만족시키는 자연수 m 은

5, 6, 7, 8, 9이므로 조건을 만족시키는

모든 자연수 m 의 값의 합은 $5+6+7+8+9=35$ 이다.

답 35

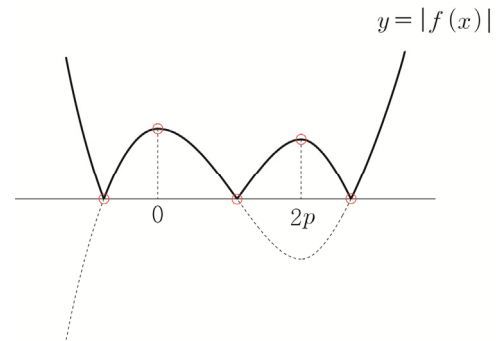
220

p, q 는 25이하의 자연수

$$f(x)=x^3-3px^2+q$$

$$f'(x)=3x^2-6px=3x(x-2p)$$

(가) 조건을 만족시키려면 $f(x)$ 의 극댓값이 양수이고
극솟값이 음수인 개형이어야 한다.

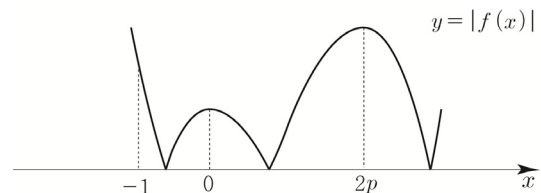


극댓값 $f(0) > 0 \Rightarrow q > 0$ (q 는 자연수이므로 무조건 만족)

$$\text{극솟값 } f(2p) < 0 \Rightarrow -4p^3 + q < 0 \Rightarrow q < 4p^3$$

닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값에 따라
case분류해보자. 최댓값은 $|f(-1)|, |f(1)|, f(0)$ 이렇게
총 3가지 경우가 가능하다.

① 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값이
 $|f(-1)|$ 이면 $|f(-1)| < |f(-2)|$ 이므로 (나) 조건을
만족시키지 않는다.



② 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값이
 $|f(1)|$ 이면 $|f(1)| < |f(2)| \leq |f(2p)|$ 이므로 (나) 조건을
만족시키지 않는다. ($\because p$ 는 자연수이므로 $2 \leq 2p$)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \{f(x) - g(x)\} dx &= \int_0^1 \{4x^3 + 2 - (-2x + a)\} dx \\&= \int_0^1 (4x^3 + 2x - a + 2) dx \\&= [x^4 + x^2 + (-a+2)x]_0^1 = 4 - a = 0 \Rightarrow a = 4\end{aligned}$$

답 4

O23

$f(x) = -x^2 + 5x - 4 = -(x-1)(x-4)$
곡선 $y = f(x)$ 는 x 축과 $x = 1$ or $x = 4$ 에서 만난다.

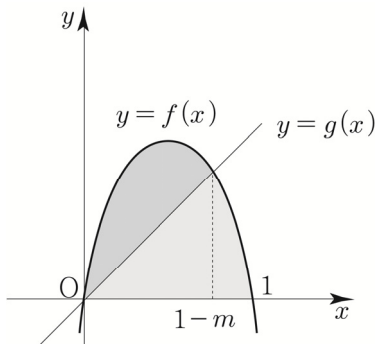
S_1, S_2, S_3 이 순서대로 등차수열을 이루므로
등차중항에 의해 $S_1 + S_3 = 2S_2$

$$\begin{aligned}S_2 &= \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x \right]_1^4 \\&= \frac{8}{3} - \left(-\frac{11}{6} \right) = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} \\ \int_0^a 2|f(x)| dx &= 2 \int_0^a |f(x)| dx = 2(S_1 + S_2 + S_3) \\&= 6S_2 = 27\end{aligned}$$

답 27

O24

$$\begin{aligned}f(x) &= -x^2 + x = -x(x-1), g(x) = mx \\-x^2 + x &= mx \Rightarrow x(x+m-1) = 0 \\ \Rightarrow x &= 0 \text{ or } x = 1-m\end{aligned}$$

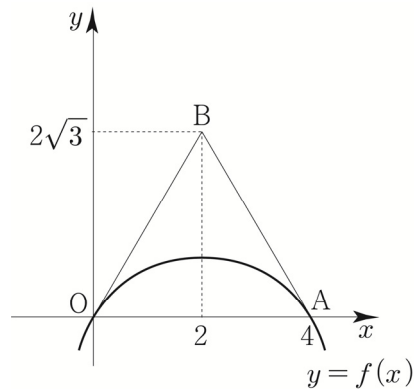


$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &= 2 \int_0^{1-m} \{f(x) - g(x)\} dx \\ \frac{1}{6}(1-0)^3 &= 2 \times \frac{1}{6}(1-m-0)^3 \\ \frac{1}{6} &= \frac{1}{3}(1-m)^3 \\ \frac{1}{2} &= (1-m)^3 \\ \text{따라서 } 4(1-m)^3 &= 2\end{aligned}$$

답 2

O25

$O(0, 0), A(4, 0), B(2, 2\sqrt{3})$
삼각형 OAB의 넓이가 두 점 O, A를 지나는
이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프에 의하여 이등분된다.
($f(x)$ 의 최고차항의 계수는 음수이다.)



삼각형 OAB(정삼각형)의 넓이 S 는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} &= 4\sqrt{3} \\ f(x) &= ax(x-4) \quad (a < 0) \\ \int_0^4 f(x) dx &= \frac{|a|}{6} (4-0)^3 = \frac{32|a|}{3} = 2\sqrt{3} \\ \Rightarrow a &= -\frac{3}{16}\sqrt{3} \\ f(x) &= -\frac{3}{16}\sqrt{3}x(x-4) \text{ 이므로} \\ 64f(1)f(2) &= 81 \text{ 이다.}\end{aligned}$$

답 81

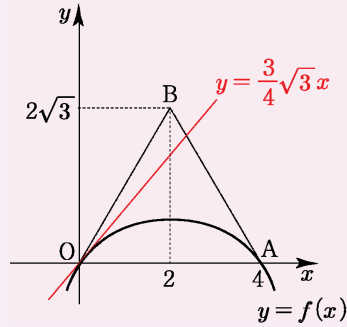
Tip <접선의 기울기를 이용한 위치관계 판단>

Q. 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 OB는 $0 < x < 2$ 에서 교점이 존재할까?

물론 직선 OB는 $y = \sqrt{3}x$ 이므로
 방정식 $f(x) = \sqrt{3}x$ 을 풀어서 확인할 수도 있지만
 $x=0$ 에서의 접선의 기울기를 이용하면 된다.

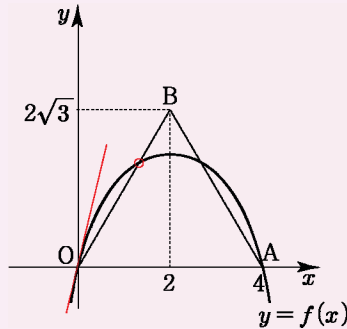
$$f'(x) = -\frac{3}{16}\sqrt{3}(2x-4) \text{ 이므로}$$

$$f'(0) = \frac{3}{4}\sqrt{3} < \sqrt{3} \text{ 이다.}$$



따라서 $0 < x < 2$ 에서 교점이 생기지 않는다.

만약 $f'(0) > \sqrt{3}$ 이면 아래 그림과 같이 교점이 존재한다.

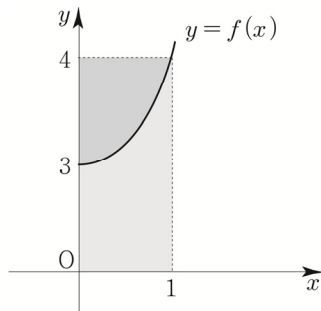


즉, 접선의 기울기는 함수의 위치관계를 판단하는
 유용한 도구로 사용될 수 있다.

026

$$f(x) = x^3 + 3(x \geq 0)$$

$$f(1) = 4$$



$$\int_0^1 f(x)dx + \int_3^4 g(x)dx \text{는 직사각형의 넓이와 같으므로}$$

(정적분의 활용 Guide step)

개념파악하기 -(5) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 사이의
 넓이는 어떻게 구할까?)

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_3^4 g(x)dx = 1 \times 4 = 4 \text{ 이다.}$$

답 4

027

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 2 \geq 0$$

$f(x)$ 는 증가함수이므로 $f(x)$ 와 역함수 $g(x)$ 의 교점은
 반드시 $y=x$ 선상에 존재한다.

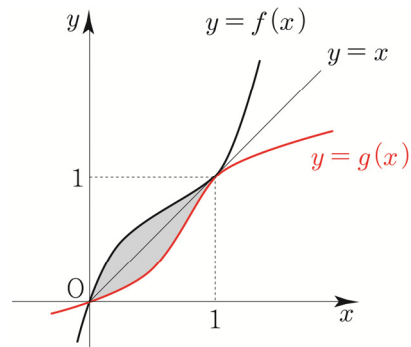
(함수의 연속 Master step 59번 해설 tip 참고)

$$x^3 - 2x^2 + 2x = x \Rightarrow x(x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ or } x=1$$

($x=1$ 에서 중근을 가지므로 곡선 $y=f(x)$ 는
 직선 $y=x$ 와 (1, 1)에서 접한다.)

즉, (0, 0), (1, 1)에서 만난다.



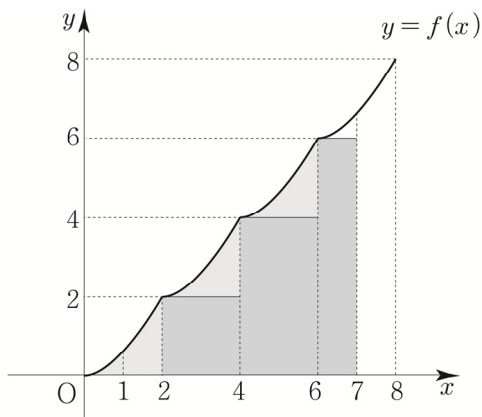
$$k = \int_0^1 \{f(x) - g(x)\}dx = 2 \int_0^1 \{f(x) - x\}dx$$

$$= 2 \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)dx = 2 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}$$

따라서 $60k = 10$ 이다.

답 10



위 색칠한 영역의 넓이를 S 라 하면

$$S = 3 \int_0^2 \frac{1}{2} x^2 dx + (2 \times 2) + (2 \times 4) + (1 \times 6)$$

$$= 3 \left[\frac{1}{6} x^3 \right]_0^2 + 18 = 22$$

따라서 $\int_1^7 f(x) dx = 22$ 이다.

답 ③

059

$$f(t) = t^2 - t, \quad g(t) = -3t^2 + 6t$$

ㄱ. 점 P는 출발 후 운동방향을 1번 바꾼다.

$$f(t) = t(t-1)$$

$t=1$ 를 경계로 $f(t)$ 의 부호가 변하므로

점 P는 $t=1$ 에서만 운동방향을 1번 바꾼다.

따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $t=2$ 에서 두 점 P, Q의 가속도를 각각 p, q 라

할 때, $pq < 0$ 이다.

$$f'(t) = 2t - 1 \Rightarrow f'(2) = 3 = p$$

$$g'(t) = -6t + 6 \Rightarrow g'(2) = -6 = q$$

$$pq = -18 < 0$$

따라서 ㄴ은 참이다.

ㄷ. $t=0$ 부터 $t=3$ 까지 점 Q가 움직인 거리는 8이다.

$$\int_0^3 |g(t)| dt = \int_0^2 (-3t^2 + 6t) dt + \int_2^3 (3t^2 - 6t) dt$$

$$= [-t^3 + 3t^2]_0^2 + [t^3 - 3t^2]_2^3 = 8$$

따라서 ㄷ은 참이다.

답 ⑤

060

S_1, S_2, S_3 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로
등차중항에 의해 $2S_2 = S_1 + S_3$ 이다.

$$\begin{aligned} 3S_2 &= S_1 + S_2 + S_3 = \int_{-1}^2 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

따라서 $S_2 = \frac{3}{2}$ 이다.

답 ④

공식을 사용하면

$$3S_2 = \frac{|-1|}{6} \{2 - (-1)\}^3 = \frac{9}{2} \Rightarrow S_2 = \frac{3}{2}$$

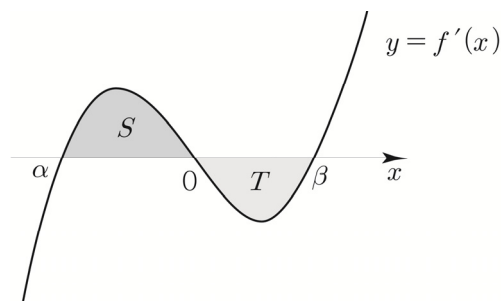
061

최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$

$$f'(\alpha) = f'(0) = f'(\beta) = 0$$

$$f'(x) = ax(x-\alpha)(x-\beta) \quad (a > 0, \alpha < 0 < \beta)$$

$$S = \int_{\alpha}^0 |f'(x)| dx, \quad T = \int_0^{\beta} |f'(x)| dx$$



ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.

$f'(x)$ 가 $x=0$ 을 경계로 $+$ \rightarrow $-$ 이므로

$f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값을 갖는다.

따라서 ㄱ은 참이다.

ㄴ. $\alpha + \beta = 0$ 이면 $S = T$ 이다.

$$\alpha + \beta = 0 \text{이면 } \alpha = -\beta$$

$f'(x) = ax(x-\beta)(x+\beta) \quad (a > 0)$ 는 원점에 대하여

점대칭이므로 (기함수) $S = T$ 이다.

따라서 ㄴ은 참이다.

065

$a > 0$, $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속

(가) $f(x) = 2x^2 + ax$ ($0 \leq x < 1$)

(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+1) = f(x) + a^2$

$$f(x+1) = f(x) + a^2$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(1) = f(0) + a^2$$

(가) 조건에 의해서 $f(0) = 0$ 이므로 $f(1) = a^2$ 이다.

$f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow 2 + a = a^2 \Rightarrow a = 2 \quad (\because a > 0)$$

$$f(x) = 2x^2 + 2x = 2x(x+1) \quad (0 \leq x < 1)$$

$$f(x+1) = f(x) + 4$$

$x+1 = t$ 라 하면

$$f(t) = f(t-1) + 4 \quad (1 \leq t < 2)$$

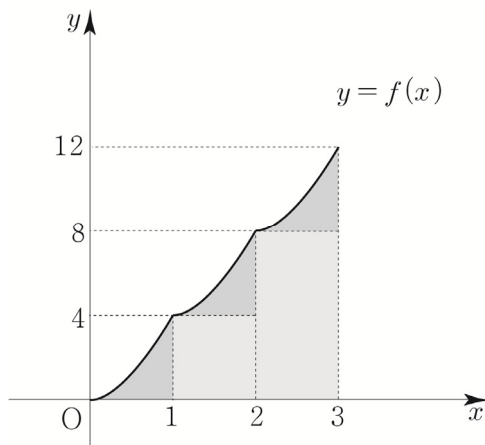
$t-1$ 는 $0 \leq t-1 < 1$ 이므로 (가) 조건에 의해

$$f(t-1) = 2(t-1)t \text{이므로}$$

$$f(t) = 2(t-1)t + 4 \quad (1 \leq t < 2)$$

즉, 이전 구간의 함수를 x 축의 방향으로 1만큼
평행이동시킨 후 y 축의 방향으로 4만큼 평행이동시켜
다음 구간의 함수를 찾을 수 있다.

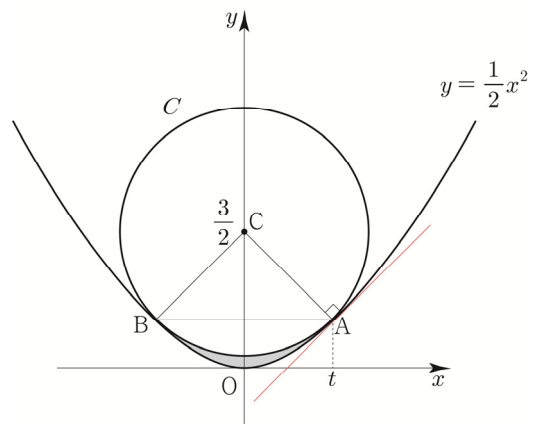
이를 바탕으로 $f(x)$ 를 그리면



$$3 \int_0^1 f(x) dx = 3 \int_0^1 (2x^2 + 2x) dx = 3 \left[\frac{2x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 = 5$$

곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=3$ 으로 둘러싸인 부분의
넓이는 $5 + 4 + 8 = 17$ 이다.

066



$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$f'(x) = x$$

접점 A의 x 좌표를 t 라 하면

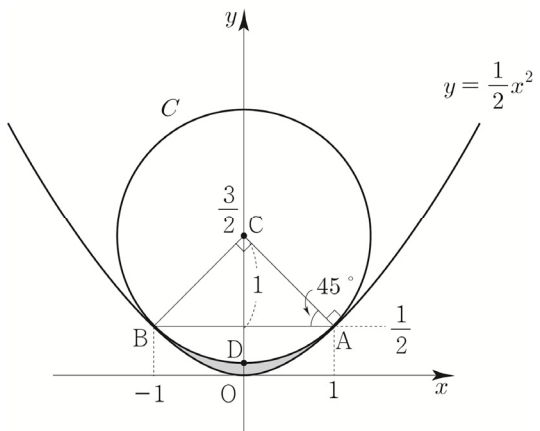
$$\text{직선 AC의 기울기} = \frac{\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}}{t-0}$$

직선 AC와 점 $A\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ 에서의 접선은 서로 수직하므로

$$\frac{\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}}{t-0} \times f'(t) = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2} = -1$$

$$\Rightarrow t = 1 \quad (\because t > 0)$$

$A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 이므로 대칭성에 의해서 $B\left(-1, \frac{1}{2}\right)$



$$\text{원 } C \text{의 반지름의 길이} = \overline{AC} = \sqrt{2}$$

$$\text{부채꼴 ACD의 넓이} = \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$(\because \angle ACD = 45^\circ)$$

$$\text{직선 AC의 방정식은 } y = -x + \frac{3}{2}$$

원 C 와 함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의